



**Inês Filipa Duarte de Oliveira**

Licenciada em Ciências de Engenharia Civil

# **Identificação das propriedades dinâmicas de um piso de ginásio**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Civil - Perfil Estruturas

Orientadora: Professora Doutora Ildi Cismasiu

Júri:

Presidente: Professor Doutor Mário Vicente da Silva  
Arguente: Professor Doutor José Nuno Varandas  
Vogal: Professora Doutora Ildi Cismasiu



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Julho de 2014**



“Copyright” Inês Filipa Duarte de Oliveira, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.





# Agradecimentos

Esta dissertação é, sem dúvida, o culminar de todo um percurso académico esforçado e trabalhoso mas é, também, uma alavanca para um futuro profissional que desejo promissor, pelo que é o momento adequado para um agradecimento a todos os que, de uma maneira ou de outra, partilharam este caminho comigo, incentivando, apoiando ou corrigindo mas nunca deixando de estarem, incondicionalmente, a meu lado.

Agradeço particularmente à Professora Doutora Ildi Cismasiu, todos os conselhos que me deu ao longo de todo o curso, por todo o apoio, pela amizade e pela disponibilidade que me dedicou nesta última etapa. À Professora Doutora Teresa Santana, uma palavra de reconhecimento pela amizade e também por todos ensinamentos que me transmitiu ao longo destes anos de aprendizagem.

Quero agradecer à instituição Sporting Clube de Portugal, em especial à Doutora Helena Duarte e a Engenheira Helena Reis, pelo interesse demonstrado na minha dissertação.

À Raquel Frutuoso e Soraia Machado, pela amizade, partilha e pelo apoio que me deram durante todo o curso e em particular nesta última fase. Ao Mário Ferreira e o Guilherme Martins, pela disponibilidade, ajuda e motivação em todo o meu percurso académico.

Ao Carlos pela cumplicidade e pela força que me transmitiu nos momentos mais difíceis.

Por fim, um agradecimento muito especial à minha família. Aos meus pais, que estão sempre em primeiro lugar no meu coração, por nunca me terem faltado, pela confiança e apoio com que estiveram presentes em todos os momentos cruciais da minha vida, pelos conselhos sábios, pelos valores transmitidos e por terem acreditado sempre nas minhas capacidades. À minha avó Maria, pelo o apoio e motivação que foram essenciais nesta fase. À minha tia Irene pela disponibilidade e principalmente pela ajuda prestada.

A todos, bem-hajam!



# Resumo

No contexto da modernização em engenharia civil tem havido um acréscimo de problemas de vibrações em diversos tipos de estruturas. Estes problemas são causados por uma variedade de factores, como por exemplo, a aplicação em construção de elementos estruturais mais leves e esbeltos, com vãos relativamente mais extensos ou até mesmo mudanças de uso de estruturas já existentes. Há, então, uma preocupação crescente em se estudar e avaliar o comportamento estrutural e adoptar soluções estruturais ou técnicas de controlo que possam, de alguma forma, reduzir os efeitos dessas vibrações. Para isso é necessário caracterizar o comportamento da estrutura, através de ensaios experimentais, possibilitando assim a identificação das propriedades dinâmicas como as frequências, os modos de vibração e o amortecimento da estrutura.

Na presente dissertação, pretende-se como objectivo principal, identificar as propriedades dinâmicas de um piso de ginásio do pavilhão Multidesportivo do Sporting Clube de Portugal, situado em Lisboa, sujeito a actividades humanas e efectuar uma análise dinâmica do mesmo. É, assim, avaliada a sua resposta quando submetido a diversos carregamentos provenientes de actividades humanas, como por exemplo, a ginástica aeróbica, as danças de salão ou o acto de saltar.

O piso da estrutura do pavilhão Multidesportivo do Sporting Clube de Portugal foi modelado através de elementos finitos, com recurso a um programa de cálculo automático (*SAP2000*). Para a análise do comportamento dinâmico real da estrutura recorreu-se a ensaios experimentais, usando a técnica de vibração ambiental e com base em métodos de identificação modal estocásticos implementados no programa *ARTEMIS*, foi possível identificar as propriedades dinâmicas do piso. Para a validação do estudo, procedeu-se a uma actualização do modelo analítico tendo em conta os resultados experimentais, com vista, a minimizar os erros entre as propriedades modais obtidas.

Por último, procedeu-se a uma análise dinâmica, no modelo já validado, com intuito de verificar se as acelerações respeitam os limites máximos definidos pelas normas e guia prático.

## Palavras chave:

Análise dinâmica; Actividades Humanas; Identificação modal; Actualização do modelo de elementos finitos.



# Abstract

With the advances in the fields of material science and engineering technology, modern structures make use of high-strength and lightweight components allowing to create long-span column-free spaces. Such structures can be susceptible to annoying vibrations due to human rhythmic activities. In order to check the vibration serviceability of existing structures or to design vibration mitigation solutions, the analytical modeling and representation of the structural properties should be complemented with in-situ vibration measurements of the full-scale structures. Modal identification techniques enable the identification of dynamic properties such as frequency, modal shapes and damping coefficients of the structure.

The main objective of this thesis is to identify the dynamic properties of a gym floor of Pavilhao Multidesportivo do Sporting Clube de Portugal located in Lisbon, and to conduct a dynamic analysis in order to assess its response under dynamic load from human activities such as aerobics, dancing or jumping.

Ambient vibrations tests were conducted and the dynamic properties of the floor were extracted from the measured data using output-only modal identification techniques, available in *ARTEMIS*. The finite element model created in *SAP2000* is then updated based on the results obtained from modal testing to better approximate the behaviour of the actual structure.

The vibration performance of the slender long-span concrete floor under human-induced dynamic loading is assessed and limit acceleration values are checked with the vibration criteria.

## Keywords:

Dynamic analysis; Human-induced load; Modal identification; Finite Element update.



# Índice de Matérias

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de abreviaturas, siglas e símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações gerais . . . . .	1
1.2 Objectivos do trabalho . . . . .	2
1.3 Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2 Vibrações devido às actividades humanas</b>	<b>5</b>
2.1 Introdução . . . . .	5
2.2 Cargas dinâmicas provenientes de actividades humanas . . . . .	5
2.3 Critérios de conforto humano . . . . .	11
2.3.1 Guia prático - AISC . . . . .	12
2.3.2 Norma Canadiana - CAN3-S16.1 . . . . .	12
2.3.3 Norma Internacional - ISO 2631-1 e ISO 2631-2 . . . . .	14
<b>3 Identificação dinâmica</b>	<b>17</b>
3.1 Introdução . . . . .	17
3.2 Técnicas de ensaios experimentais . . . . .	17
3.3 Técnicas de identificação modal . . . . .	19
3.3.1 Identificação modal no domínio da frequência . . . . .	20
3.3.2 Identificação modal no domínio do tempo . . . . .	23
3.4 Análise e processamento de sinais . . . . .	24
<b>4 Caso de estudo - Pavilhão Multidesportivo do Sporting</b>	<b>29</b>
4.1 Introdução . . . . .	29
4.2 Descrição da estrutura . . . . .	29
4.3 Modelação da estrutura . . . . .	33
4.4 Medições in-situ . . . . .	37
4.4.1 Equipamento de medição . . . . .	37
4.4.2 Procedimentos de ensaio . . . . .	38

4.5	Análise e processamento de sinais . . . . .	40
4.5.1	Ensaio do impacto do calcanhar . . . . .	40
4.5.2	Pré-processamento das séries temporais . . . . .	40
4.5.3	Identificação modal . . . . .	45
4.5.4	Validação do modelo . . . . .	47
4.6	Melhoramento do modelo de elementos finitos M1 . . . . .	48
4.6.1	Revisão e aperfeiçoamento do modelo . . . . .	48
4.6.2	Ajuste dos parâmetros . . . . .	52
4.7	Actualização do modelo de elementos finitos M2 . . . . .	56
4.8	Validação do modelo de elementos finitos M3 . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Análise dinâmica</b>	<b>61</b>
5.1	Introdução . . . . .	61
5.2	Definição da carga dinâmica . . . . .	62
5.3	Casos de estudos . . . . .	63
5.3.1	Avaliação da resposta dinâmica da laje . . . . .	66
5.3.2	Verificação dos níveis de conforto . . . . .	67
5.3.3	Discussão dos resultados . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>71</b>
6.1	Conclusões . . . . .	71
6.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	72
	<b>Bibliografia</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Verificação analítica da frequência da viga em caixão.</b>	<b>77</b>
A.1	Cálculo da frequência fundamental de uma viga . . . . .	77
A.1.1	Cálculo da frequência da viga em caixão . . . . .	77
A.2	Cálculo da frequência da viga em caixão pelo programa SAP2000 . . . . .	78
A.3	Erros relativos . . . . .	79



# Índice de Figuras

2.1	Modalidades de carregamentos produzidos por actividades humanas. . . . .	6
2.2	Força exercida durante um salto. . . . .	7
2.3	Cargas dinâmicas geradas por diversas actividades. . . . .	8
2.4	Comparação entre a funções da expressão 2.1 e a expressão 2.8 com três e seis termos. . .	10
2.5	Valores limites recomendados de acelerações para actividades humanas (caminhar). . . .	13
2.6	Exemplo da resposta obtida no momento do impacto do calcanhar sobre um piso. . . . .	13
2.7	Direcções de medição de vibrações do corpo humano. . . . .	14
2.8	Limites de conforto máximos recomendados em termos de acelerações de pico para actividades humanas. . . . .	15
2.9	Curva limite para critérios de conforto em acelerações RMS segundo o eixo z. . . . .	16
3.1	Exemplos de equipamentos utilizados nos ensaios de vibrações forçadas. . . . .	18
3.2	Equipamentos (sensores) utilizados em ensaios de vibração. . . . .	19
3.3	Esquema da identificação estocástica através de ensaios de vibração ambiental. . . . .	19
3.4	Exemplo de um espectro de funções de densidade espectral, utilizando o FDD. . . . .	22
3.5	Esquema de um diagrama de estabilização. . . . .	24
3.6	Processo de transformação de um sinal analógico em digital, com utilização de um filtro analógico. . . . .	25
3.7	Exemplo do efeito da sobreposição num sinal contínuo. . . . .	26
3.8	Exemplo representativo da aplicação de um filtro a uma série temporal. . . . .	27
4.1	Pavilhão Multidesportivo do Sporting Clube de Portugal. . . . .	30
4.2	Corte transversal do pavilhão Multidesportivo do SCP. . . . .	30
4.3	Corte longitudinal do pavilhão Multidesportivo do SCP. . . . .	31
4.4	Exemplo de um piso do pavilhão Multidesportivo. . . . .	31
4.5	Representação da parte da laje em estudo. . . . .	32
4.6	Secção transversal a meio vão da viga VPT.1. . . . .	32
4.7	Modelo global (M0) do pavilhão multidesportivo. . . . .	34
4.8	Modelo (M1) do piso para posterior análise. . . . .	35
4.9	Pormenor da ligação entre os elementos estruturais no <i>SAP2000</i> . . . . .	35
4.10	Modos de vibração com as respectivas frequências referentes ao modelo M1. . . . .	36
4.11	Componentes do sistema de monitorização MR2002-CE9. . . . .	37
4.12	Mecânica do Geofone MS2002-CE triaxial. . . . .	38
4.13	Pontos medidos para caracterização dinâmica do piso. . . . .	39
4.14	Ensaio do impacto do calcanhar - ("heel drop test"). . . . .	40
4.15	Gráficos das velocidades obtidas no ensaio 1, segundo a direcção z. . . . .	41
4.16	Gráficos de velocidades obtido pelo Geofone 1, já com a diminuição do ruído (verde). . .	42

4.17	Estimativa das funções de densidade espectral (G1, G2 e G3) relativamente ao primeiro ensaio. . . . .	42
4.18	Coerência entre os sinais medidos a partir G1 e G2, G2 e G3 e G1 e G3, do primeiro ensaio. . . . .	43
4.19	Média dos valores singulares normalizados da matriz de funções de densidade espectral a partir de todos os ensaios. . . . .	44
4.20	Espectrograma entre o G1 e G3, relativamente ao primeiro ensaio. . . . .	45
4.21	Espectros dos valores singulares da matriz de funções de densidade espectral, segundo o método EFDD. . . . .	45
4.22	Diagrama de estabilização, utilizando como método de identificação o SSI-UPC. . . . .	46
4.23	Modos de vibração identificados pelo método EFDD (cor azul) e pelo método SSI-UPC (cor vermelha). . . . .	47
4.24	Diagrama de momentos flectores da laje do modelo prévio, segundo a direcção x. . . . .	49
4.25	Pormenores da modelação da viga em caixão com elementos do tipo <i>Barra</i> . . . . .	49
4.26	Pormenores da modelação da viga em caixão com elementos do tipo <i>Membrana</i> . . . . .	49
4.27	Diagrama de momentos flectores da laje do novo modelo, segundo a direcção x. . . . .	50
4.28	Modelo final M2 após revisão e melhoramento do modelo M1. . . . .	51
4.29	Modos de vibração (1, 2, 3 e 4) com as respectivas frequências referentes ao modelo M2. . . . .	51
4.30	Modos de vibração (5 e 6) com as respectivas frequências referentes ao modelo M2. . . . .	52
4.31	Estudo de sensibilidade da influência do módulo de elasticidade nos elementos verticais. . . . .	53
4.32	Estudo de sensibilidade da influência do módulo de elasticidade nas vigas em caixão. . . . .	53
4.33	Estudo de sensibilidade da influência do módulo de elasticidade nos restantes elementos estruturais. . . . .	54
4.34	Estudo de sensibilidade da influência do peso volúmico nos elementos verticais. . . . .	54
4.35	Estudo de sensibilidade da influência do peso volúmico nas vigas em caixão. . . . .	55
4.36	Estudo de sensibilidade da influência do peso volúmico nos restantes elementos estruturais. . . . .	55
4.37	Estudo de sensibilidade da mola referente à influência da laje adjacente. . . . .	56
4.38	Configuração modal do método SSI-UPC (cor vermelha) e do modelo numérico do SAP2000 (cor verde). . . . .	58
4.39	Configuração modal do método FDD (cor verde) e do modelo numérico do SAP2000 (cor vermelha). . . . .	59
5.1	Interação entre o individuo e a estrutura. . . . .	61
5.2	Definição <i>Load Case Data - Linear Modal History</i> . . . . .	63
5.3	Funções de carga definidas para as diferentes frequências. . . . .	64
5.4	Representação da área existente para a prática de actividades humanas (área preenchida a cor cinzenta). . . . .	64
5.5	Disposição das pessoas sobre a laje em estudo. . . . .	65
5.6	Espaçamentos considerados na disposição das pessoas. . . . .	65
5.7	Representação do ponto de monitorização (cor verde) e os pontos de acelerações máximas (cor preta). . . . .	66
5.8	Acelerações máximas no ponto de monitorização para as diferentes frequências. . . . .	67
5.9	Variação de aceleração de pico em função do aumento do número de pessoas no ponto de monitorização (7533). . . . .	67
5.10	Variação de aceleração em RMS em função do aumento do número de pessoas no ponto de monitorização (7533). . . . .	68
A.1	Secção transversal a meio vão da viga VPT.1. . . . .	78

A.2	Modelo da viga em caixão. . . . .	78
A.3	Primeiro e segundo modo de vibração da viga em caixão . . . . .	79



# Índice de Tabelas

2.1	Frequências naturais de diferentes tipos de actividades. . . . .	6
2.2	Valores recomendados de $\alpha$ e respectivos factores de impacto de algumas actividades humanas . . . . .	10
2.3	Coeficientes de Fourier e ângulos de fase para os coeficientes de contacto. . . . .	11
2.4	Limites de acelerações recomendadas de vibrações. . . . .	12
4.1	Características geométricas das secções transversais dos elementos estruturais . . . . .	33
4.2	Características dos materiais empregues no piso em estudo. . . . .	33
4.3	Configuração dos geofones em cada ensaios efectuado. . . . .	39
4.4	Propriedades dinâmicas resultantes da aplicação dos métodos EFDD e SSI-UPC. . . . .	46
4.5	Comparação entre as técnicas EFDD e SSI-UPC, através da matriz MAC. . . . .	46
4.6	Resumo das frequências resultantes das alterações efectuadas a partir do modelo M1. . . . .	50
4.7	Opções dos parâmetros adoptados após o estudo de sensibilidade no modelo M2. . . . .	57
4.8	Frequências finais após ajuste dos parâmetros no modelo M3. . . . .	57
4.9	Erro relativo entre as frequências obtidas e respectivo coeficiente MAC. . . . .	58
4.10	Erro relativo entre as frequências obtidas e respectivo coeficiente MAC. . . . .	59
5.1	Acelerações máximas para as duas actividades, em função do número de pessoas. . . . .	66
A.1	Frequências fundamentais da viga em caixão. . . . .	78
A.2	Comparação entre as frequências analíticas e as obtidas pelo SAP2000. . . . .	79



# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

## Abreviaturas

G1	Geofone 1 (MS2002)
G2	Geofone 2 (MS2002)
G3	Geofone 3 (MS2002)
G4	Geofone 4 (MS3000C)

## Siglas

AISC	American Institute of Steel Construction
BFD	Basic Frequency Decomposition
CFDD	Curve-fit Frequency Domain Decomposition
CSA	Canadian Standard Association
DFT	Discrete Fourier transform
EFDD	Enhanced Frequency Domain Decomposition
EMA	Experimental Modal Analysis
FCT	Faculdade de Ciências e Tecnologia
FDD	Frequency Domain Decomposition
FFT	Fast Fourier Transform
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
ISO	International Organization for Standardization
MAC	Modal Assurance Criterion
OMA	Operational Modal Analysis
RMS	Root Mean Square

SAP2000	Structural Analysis Program
SCP	Sporting Clube de Portugal
SSI-DATA	Driven Stochastic Subspace Decomposition
SSI-CVA	Canonical Variate Analysis
SSI-PC	Principal Component
SSI-UPC	Unweighted Principal Components
SVD	Singular Value Decomposition
UNL	Universidade Nova de Lisboa

### Símbolos

$g$	aceleração gravítica
$\xi$	amortecimento
$F_{max}$	amplitude máxima da carga
$\phi$	ângulo de fase
$\alpha$	coeficiente de contacto
$r$	coeficiente de Fourier
$\nu$	coeficiente de Poisson
$Kp$	factor de impacto
$f_n$	frequência natural
$\mu$	massa distribuída
$E$	módulo de elasticidade
$I$	momento de inércia
$Tp$	período da actividade
$G$	peso de um indivíduo
$\rho$	peso volúmico
$t$	tempo
$tp$	tempo de contacto



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações gerais

O avanço das novas tecnologias estruturais, como o emprego de novos materiais de alta resistência e sistemas construtivos mais avançados, permitiu a concepção de estruturas de betão armado mais leves e esbeltas, tendo como consequências, o aumento da fissuração e a diminuição da rigidez dos elementos estruturais [40]. É precisamente a menor rigidez que determina a ocorrência de maiores deslocamentos nas estruturas, tornando-as cada vez mais susceptíveis a problemas de vibrações.

Estas novas concepções estruturais resultam em estruturas de betão armado com frequências mais baixas, que quando aproximadas das frequências de excitação provenientes das actividades humanas, provocam a ocorrência de fenómenos de ressonância [3]. Embora as forças provenientes da excitação humana excepcionalmente provoquem o colapso da estrutura, estas podem frequentemente gerar algum desconforto aos ocupantes, caso se verifiquem níveis de vibração superiores aos limites recomendados [2].

Neste sentido, o estudo de vibrações em obras de engenharia civil assume particular interesse, existindo actualmente inúmeras investigações e análises, que recorrem a ensaios experimentais em diferentes fases do projecto e pós-execução, com o intuito de minimizar alguns dos efeitos das vibrações [32]. Assim, é possível a modificação de alguns parâmetros principais como o caso da rigidez e a massa da estrutura, tendo sempre como objectivo o afastamento da frequência natural do piso da frequência de excitação. No entanto, é importante ressaltar que nem sempre é possível alterar significativamente estes parâmetros por razões arquitectónicas e/ou económicas. Com o conhecimento destas limitações, diversos investigadores propõem adicionar às estruturas dispositivos de controlo, como por exemplo, amortecedores de massa sintonizada, tanto em fase de projecto como em estruturas já construídas [6, 27].

A análise do comportamento dinâmico de estruturas de betão de armado quando solicitadas a acções dinâmicas induzidas por actividades humanas, tais como dança, salto e exercícios aeróbicos, constituem um problema complexo [33]. Isto deve-se ao facto das características das forças de excitação produzidas durante a execução destas actividades estarem associadas às características corporais de cada indivíduo, relacionadas com o peso, o sexo, a idade do indivíduo e o modo como este executa determinada actividade.

De forma a caracterizar o estado actual da estrutura são realizados ensaios experimentais in-situ aplicando várias técnicas de vibrações disponíveis. Das técnicas utilizadas em engenharia civil

destacam-se as de vibração forçada, ambiental e livre. Para estruturas de grande porte torna-se difícil a utilização de técnicas de vibração forçada, em que o tipo de excitação é previamente conhecido, uma vez que os equipamentos necessários para gerar forças capazes de excitar a estrutura ostentam um custo elevado. Por este motivo, utilizam-se as técnicas de vibração não controlada, como é o caso da ambiental, onde não existe a necessidade de conhecer o tipo de excitação.

Com a informação obtida nos ensaios é possível, através de métodos de identificação modal, estimar um conjunto de parâmetros inerentes à estrutura, tais como as frequências naturais e respectivos modos de vibração, e em alguns casos, o coeficiente de amortecimento. Os registos podem ser analisados segundo dois métodos de identificação modal, a determinística e a estocástica. Importa referir, que para a presente dissertação apenas interessa estudar os métodos estocásticos que estão normalmente associados às técnicas de vibração ambiental.

Os métodos de identificação estocásticos dividem-se em dois grupos distintos: os métodos no domínio do tempo e os métodos no domínio da frequência, que se diferenciam pelo tipo de dados utilizados na identificação modal [34]. Desta forma, os métodos de análise no domínio da frequência, baseando-se em estimativas espectrais da resposta da estrutura e os métodos no domínio do tempo, utilizam como base os registos originais das séries temporais da resposta da estrutura. Assim, com a utilização destes métodos de identificação é possível determinar as propriedades dinâmicas da estrutura existente, de forma a comparar os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos concebido para a análise numérica. Caso as propriedades dinâmicas do modelo numérico não se ajustem bem aos resultados obtidos experimentalmente, é necessário efectuar uma revisão e actualização do modelo, para diminuir o erro relativo entre as frequências e aumentar a correlação entre as configurações modais encontradas.

O modelo de elementos finitos actualizado pode ser utilizado em análise futuras, nomeadamente, na obtenção da resposta dinâmica da estrutura e na monitorização da mesma ao longo do tempo, de forma a identificar uma possível alteração dos parâmetros modais da estrutura.

## **1.2 Objectivos do trabalho**

O objectivo principal desta dissertação é identificar as propriedades dinâmicas, através de ensaios experimentais, de um piso de ginásio do pavilhão Multidesportivo do Sporting Clube de Portugal, situado em Lisboa. Para isso, é elaborado inicialmente um modelo de elementos finitos no *SAP2000*, que permite definir os pontos críticos para as futuras medições e identificar as principais gamas de frequências da estrutura. Pretende-se, através de ensaios in-situ e utilizando a técnica de vibração ambiental, efectuar uma caracterização da estrutura, de forma a identificar as propriedades dinâmicas da mesma.

Outro dos objectivos é comparar os resultados obtidos experimentalmente com o modelo anteriormente desenvolvido e é feita uma actualização deste, de forma a minimizar os erros entre as propriedades modais.

Na presente dissertação, pretende-se também efectuar uma análise dinâmica no modelo de elementos finitos actualizado e verificar a resposta da estrutura a carregamentos provenientes de actividades humanas, averiguando se as acelerações provenientes dessas mesmas actividades respeitam os limites máximos impostos pelos regulamentos.

O mesmo piso foi objecto de estudo paramétrico da resposta dinâmica sujeita a actividades rítmicas [30]. Contudo, a análise do piso baseia-se exclusivamente no modelo de elementos finitos, elaborado a partir das peças desenhadas, não permitindo a comparação dos resultados obtidos.

## 1.3 Organização do trabalho

A dissertação encontra-se dividida em seis capítulos, incluindo as referências bibliográficas e um anexo.

Neste primeiro capítulo são expostos simplificadaamente alguns pontos importantes no âmbito desta dissertação, definindo os objectivos da mesma.

No segundo capítulo efectua-se uma breve descrição das cargas dinâmicas provenientes de actividades humanas rítmicas, apresentando algumas das funções que permitem representar os carregamentos dessas mesmas actividades. São também referidas algumas normas e guias práticos respeitantes aos pisos, que definem critérios limite de conforto para actividades humanas.

O terceiro capítulo resume algumas das técnicas experimentais que se utilizam em engenharia civil. São também revistos alguns dos métodos de identificação modal, no domínio da frequência e do tempo, que permitem avaliar as características dinâmicas de estruturas. Finalmente, são apresentados alguns conceitos básicos da análise e processamento dos sinais.

No quarto capítulo são apresentadas as características geométricas, bem como as diferentes propostas da modelação da estrutura com recurso ao programa de cálculo automático, *SAP2000*. Neste capítulo é também descrito o procedimento utilizado nas medições in-situ e os resultados provenientes destes ensaios são posteriormente processados através de dois programas, o *Matlab* e o *ARTEMIS*, possibilitando assim a caracterização do comportamento dinâmico da estrutura.

No quinto capítulo são apresentados os resultados obtidos da análise dinâmica efectuada no modelo de elementos finitos actualizado, submetido a carregamentos provenientes de actividades humanas.

O capítulo seis expõe-se, em síntese, as conclusões mais importantes desta dissertação e propõe-se desenvolvimentos futuros no seguimento deste trabalho.



## Capítulo 2

# Vibrações devido às actividades humanas

### 2.1 Introdução

A importância de se considerarem em projectos de estruturas os efeitos de diversos tipos de cargas dinâmicas tem aumentado ao longo dos anos com o uso generalizado de formas mais leves em estruturas com grandes vãos. Em actividades humanas rítmicas existe uma grande possibilidade de ocorrer uma situação de sincronização entre acções, possibilitando a ocorrência de fenómenos de ressonância [26]. Este aspecto é importante uma vez que pode afectar tanto a operacionalidade e o conforto e, em casos extremos, a segurança dos ocupantes.

Neste capítulo efectua-se uma breve descrição de algumas actividades rítmicas, como a dança, a aeróbica e os saltos, apresentando-se a gama de frequências para cada uma delas e algumas funções que são adoptadas na representação das cargas dinâmicas dessas actividades. São também apresentados algumas normas, encontradas na literatura, que definem critérios de conforto que permitem que os ocupantes quando estão a praticar tais actividades se sintam confortáveis.

### 2.2 Cargas dinâmicas provenientes de actividades humanas

As acções dinâmicas são carregamentos em que a sua direcção, posição e grandeza variam ao longo do tempo, provocando respostas nas estruturas em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações, que também variam ao longo do tempo [17]. O vento, os sismos, os equipamentos e também as acções provenientes de actividades humanas são exemplos de acções que provocam vibrações nas estruturas. Estas últimas são caracterizadas pela frequência da actividade, pelo tempo de contacto com a superfície, pela carga dinâmica gerada e pelo amortecimento produzido durante a actividade executada. Estas acções dinâmicas são de definição complexa, dependendo essencialmente das características corporais de cada individuo, relacionadas com o peso, o sexo, a idade do individuo e o modo como este executa determinada actividade [33].

Como anteriormente referido, esta dissertação centra-se no estudo das acções induzidas por actividades humanas rítmicas como a dança, a aeróbica e os saltos. Algumas destas actividades estão reproduzidas na figura 2.1.



(a) Salto



(b) Aeróbica



(c) Dança de Salão

Figura 2.1: Modalidades de carregamentos produzidos por actividades humanas.

A tabela 2.1 exhibe alguns valores obtidos por diversos autores, apresentando-se a gama de frequências fundamentais medidas. Estas frequências são as sugeridas quando se efectua um projecto de dimensionamento sujeito a carregamentos dinâmicos, sendo que também utilizadas quando se pretende avaliar a resposta dinâmica da estrutura sujeita a cargas provenientes de actividades humanas.

Tabela 2.1: Frequências naturais de diferentes tipos de actividades.

Actividades humanas rítmicas	Frequências naturais [Hz]	Número de pessoas	Referências bibliográficas
Saltar	1.8-3.4	1	CEB 1990 [47]
	2.0-3.0	1	Allen and Pernica [4]
	1.7-2.9	20	Faísca [17]
Dançar	1.5-3.0	8	AISC [35]
	1.5-3.0	1	CEB 1990 [47]
	2.0-2.75	8	AISC [35]
Ginastica aeróbica	1.5-2.8	1	Ji and Ellis [25]
	2.2-2.5	1	Faísca [17]
Correr	2.0-3.5	1	CEB 1990 [47]

Em função da interacção pessoa-estrutura, as acções produzidas por actividades rítmicas estão divididas

em 2 grupos [5]. Num primeiro grupo estão incluídas as actividades onde o contacto é praticamente contínuo entre o indivíduo e o piso, como por exemplo a dança. No segundo grupo inserem-se actividades que envolvem a perda de contacto com a estrutura durante breves instantes, predominando a execução de saltos e principalmente um grau de sincronismo dos participantes. A aeróbica, o salto e a corrida são exemplos de actividades que estão presentes neste último grupo.

Na figura 2.2, apresenta-se uma das actividades descritas em cima, o salto. Pode-se verificar que quando o indivíduo perde o contacto com o piso, a força aplicada sobre este é nula. À medida que o indivíduo ganha o contacto com o solo, a força aumenta até atingir valor máximo apresentado [17]. Daqui se conclui que a força máxima é inversamente proporcional ao tempo de contacto com a superfície.

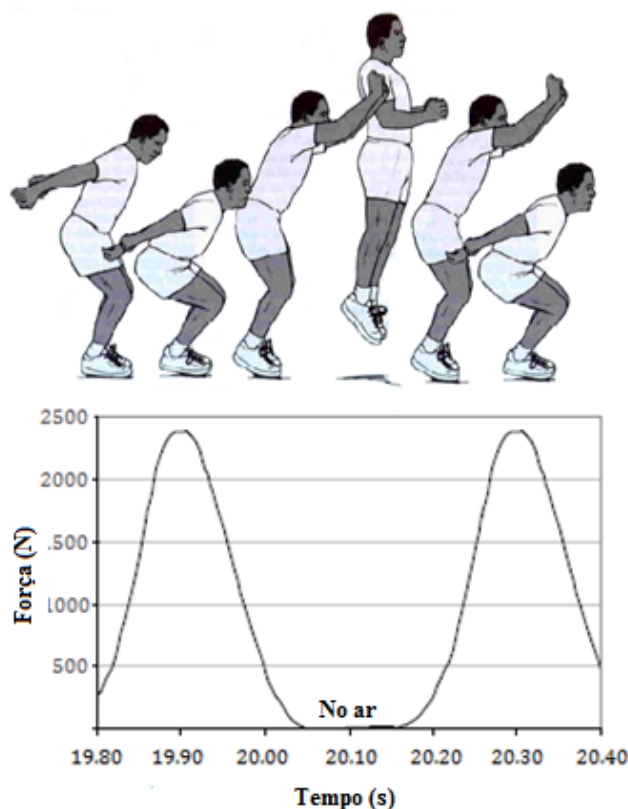


Figura 2.2: Força exercida durante um salto, adaptado de [17].

Quanto às cargas dinâmicas induzidas por actividades humanas, estas podem ser classificadas em 4 tipos: harmónicas, periódicas, transientes e impulsivas, como se pode ver na figura 2.3 [35]. As actividades como a dança podem ser consideradas periódicas e as que incluem cargas induzidas por movimentação de pessoas como saltar ou correr são transientes.

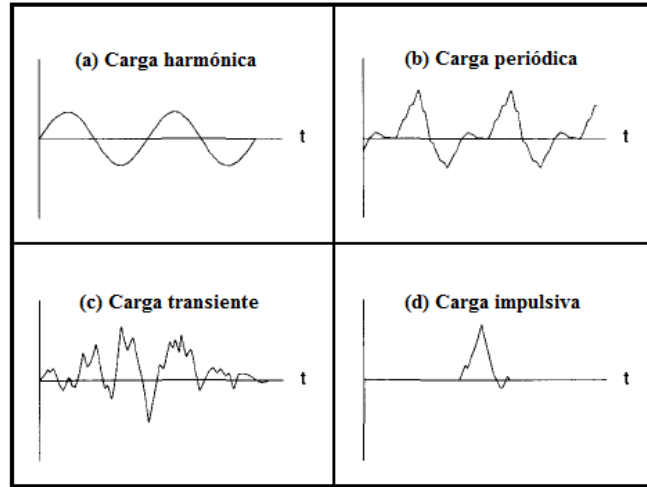


Figura 2.3: Cargas dinâmicas geradas por diversas actividades, adaptado de [35].

A representação das cargas dinâmicas por actividades humanas foi objecto de vários trabalhos de investigação [3, 17, 24, 25, 35], tendo como objectivo, estabelecer parâmetros que descrevem por completo as cargas dinâmicas. Destas investigações foi inicialmente desenvolvida a expressão 2.1 por ramos. Esta expressão é caracterizada por uma série de semi-sinusoidais, em que o primeiro ramo define a acção dinâmica e o segundo ramo toma um valor nulo, uma vez que não existe contacto com a estrutura como foi referido anteriormente.

$$F(t) = \begin{cases} K_p G \sin(\pi t/t_p) & 0 \leq t \leq t_p \\ 0 & t_p \leq t \leq T_p \end{cases} \quad (2.1)$$

em que,

$K_p$  - Factor de impacto ( $F_{max}/G$ )

$F_{max}$  - Amplitude máxima da carga

$G$  - Peso do individuo

$t_p$  - Tempo de contacto

$T_p$  - Período da actividade

$t$  - Tempo

O tempo de contacto,  $t_p$ , é um parâmetro a ter em conta quando se efectuam modelações de acções dinâmicas e pode variar entre 0 e  $T_p$ , dependendo essencialmente dos diferentes tipos de actividades e movimentos. O coeficiente de contacto,  $\alpha$ , pode tomar um valor máximo de 1 quando existe um contacto permanente com o piso. Este coeficiente é então definido pela equação 2.2.

$$\alpha = \frac{t_p}{T_p} \leq 1.0 \quad (2.2)$$

Assim, os diferentes tipos de coeficientes de contacto caracterizam diferentes tipos de actividades rítmicas.

A função definida na equação 2.1 apesar de ser uma forma simples de definir uma carga dinâmica não é a que mais se aproxima da realidade. A definição das cargas dinâmicas em termos de séries de Fourier,



expressa na equação 2.3, permite obter uma solução analítica mais proficiente. Nesta definição, uma parcela corresponde a parte estática (peso do indivíduo) e a outra ao somatório das cargas dinâmicas.

$$F(t) = G \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \right] = G \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin \left( \frac{2n\pi}{T_p} t + \phi_n \right) \right] \quad (2.3)$$

em que os coeficientes de Fourier e ângulos de fase são determinados através das expressões 2.4.

$$a_0 = \frac{2K_p\alpha}{\pi}; \quad r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \quad (2.4)$$

Quando  $2n\alpha = 1$ ;  $n = 1, 2, \dots$  então  $a_n = 0$  e  $b_n = \pi/2$ , caso contrário utiliza-se as equações 2.5.

$$a_n = \frac{K_p\alpha}{\pi} \left[ \frac{\cos(2n\alpha - 1)\pi - 1}{2n\alpha - 1} - \frac{\cos(2n\alpha + 1)\pi - 1}{2n\alpha + 1} \right] \quad (2.5)$$

$$b_n = \frac{K_p\alpha}{\pi} \left[ \frac{\sin(2n\alpha - 1)\pi}{2n\alpha - 1} - \frac{\sin(2n\alpha + 1)\pi}{2n\alpha + 1} \right]$$

Alguns autores após várias investigações [24, 25], verificaram que o valor médio do registo de qualquer carga dinâmica vertical é igual ao peso de um indivíduo ou de um grupo de indivíduos que efectua uma actividade. Assim, integrando essa carga ao longo do período de contacto, resulta a expressão 2.6.

$$\frac{1}{T_p} \int_0^{t_p} K_p G \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) dt = G \quad (2.6)$$

Simplificando a equação anterior, resulta a equação 2.7, que permite obter o factor de impacto,  $K_p$ . Esta equação traduz uma relação de proporcionalidade inversa entre o coeficiente de contacto e o factor de impacto.

$$K_p = \frac{\pi}{2\alpha} \quad (2.7)$$

Substituindo a equação 2.7, nas equações 2.3 e 2.5, obtêm-se as expressões 2.8 e 2.9, respectivamente.

$$F(t) = G \left[ 1.0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \right] = G \left[ 1.0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin \left( \frac{2n\pi}{T_p} t + \phi_n \right) \right] \quad (2.8)$$

em que os coeficientes de Fourier e os ângulos de fase são determinados pelas expressões 2.4, anteriormente referidas.

$$a_n = 0.5 \left[ \frac{\cos(2n\alpha - 1)\pi - 1}{2n\alpha - 1} - \frac{\cos(2n\alpha + 1)\pi - 1}{2n\alpha + 1} \right] \quad (2.9)$$

$$b_n = 0.5 \left[ \frac{\sin(2n\alpha - 1)\pi}{2n\alpha - 1} - \frac{\sin(2n\alpha + 1)\pi}{2n\alpha + 1} \right]$$

Na figura 2.4 estão as funções anteriormente referidas. A expressão 2.1, ilustrada a traço grosso, corresponde a uma série de semi-sinusoidais. A expressão 2.8, definida a traço descontínuo e contínuo, representa as funções definidas pelas séries de Fourier constituídas por três e seis termos, respectivamente.

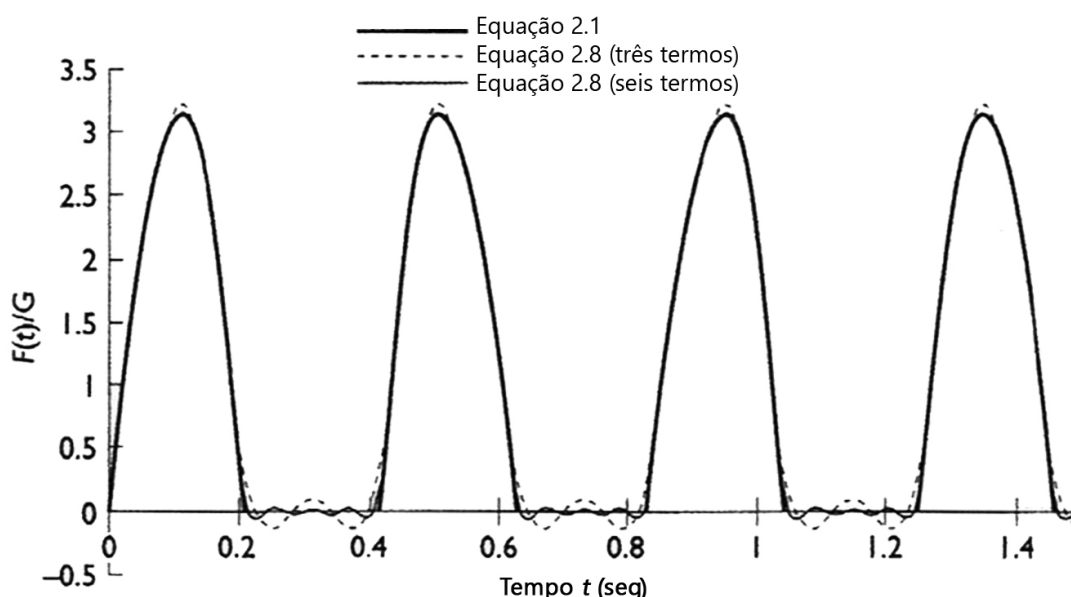


Figura 2.4: Comparação entre a funções da expressão 2.1 e a expressão 2.8 com três e seis termos, adaptado de [26].

Em geral, para o cálculo dos deslocamentos é suficiente considerar-se os três primeiros termos para cargas verticais, uma vez que a resposta estrutural não é significativa para valores superiores. No entanto, é referido que para o caso de acelerações são necessários serem considerados mais do que três termos.

Para a definição das cargas dinâmicas, é necessário determinar os valores do coeficiente de contacto para as diferentes actividades humanas. Ellis e Ji [25] avaliaram diversos estudos experimentais realizados no Canadá e, baseando-se nas investigações de Allen e Pernica [4, 2], propuseram coeficientes de contacto para os diferentes tipos de actividades definidos na tabela 2.2. Também é possível observar na mesma tabela os respectivos factores de impacto calculados através da expressão 2.7.

Tabela 2.2: Valores recomendados de  $\alpha$  e respectivos factores de impacto de algumas actividades humanas [26].

Actividade humana	Coeficiente de contacto $\alpha$	Factor de impacto $K_p$
Actividade de baixo impacto	2/3	2.4
Exercícios rítmicos e actividades de ritmo elevado	1/2	3.1
Salto normal	1/3	4.7
Salto alto	1/4	6.3

Na tabela 2.3, estão registados os seis primeiros coeficientes de Fourier e ângulos de fase para os diferentes coeficientes de contacto.

### 2.3. CRITÉRIOS DE CONFORTO HUMANO

Tabela 2.3: Coeficientes de Fourier e ângulos de fase para os coeficientes de contacto [25].

		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$\alpha = 2/3$	$r_n$	1.2857	0.1636	0.1333	0.0364	0.0230	0.0318
	$\phi_n$	$-\pi/6$	$\pi/6$	$-\pi/2$	$-\pi/6$	$\pi/6$	$-\pi/2$
$\alpha = 1/2$	$r_n$	1.5708	0.6667	0.0000	0.1333	0.0000	0.0571
	$\phi_n$	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$
$\alpha = 1/3$	$r_n$	1.8000	1.2857	0.6667	0.1636	0.0989	0.0133
	$\phi_n$	$\pi/6$	$-\pi/6$	$-\pi/2$	$\pi/6$	$-\pi/6$	$-\pi/2$
$\alpha = 1/4$	$r_n$	1.8856	1.5708	1.1314	0.6667	0.2694	0.0000
	$\phi_n$	$\pi/4$	0	$-\pi/4$	$-\pi/2$	$\pi/4$	0

No caso em que as actividades são executadas por um grupo de pessoas e de forma a ter uma aproximação real da resposta da estrutura, este efeito deve ser tido em conta numa análise, ou seja, o número de indivíduos deve ser contabilizado [26]. No entanto, a sua caracterização real é de definição complexa, uma vez que um grupo de indivíduos ao tentar efectuar um movimento repetido, dificilmente o faz de forma sincronizada. A resposta da estrutura produzida por esse grupo é menor do que seria se o movimento dos indivíduos fosse sincronizado, ou seja, a resposta da estrutura é atenuada.

Para a caracterização das cargas dinâmicas no capítulo 5, vai ser utilizada a equação 2.8.

### 2.3 Critérios de conforto humano

Os critérios de conforto são definidos por limites de acelerações máximas ou por critérios que estabelecem frequências mínimas.

Em Portugal verifica-se a ausência de normas portuguesas que definem critérios de conforto para actividades humanas rítmicas. No entanto, as únicas referências existentes por parte do LNEC, evidenciam limites de velocidade efectiva para edifícios de cariz comercial ou residencial. O Eurocódigo 0, EN-1990, refere a importância dos aspectos de serviço em relação às vibrações, mencionando apenas que estes devem ser considerados no projecto de dimensionamento. São também apresentados alguns aspectos relacionados com o conforto em pontes pedonais, limitando as acelerações verticais a  $0.7 \text{ m/s}^2$  para estruturas com frequências verticais abaixo dos 5 Hz. Contudo, as indicações anteriormente referidas não têm qualquer aplicação no caso em estudo, uma vez que não fazem referência a pisos sujeitos a actividades rítmicas [16]. Torna-se então necessário recorrer a normas estrangeiras com o intuito de garantir um bom funcionamento dos diferentes tipos de estruturas.

Relativamente a critérios de conforto humano definidos por frequências, as normas existentes apenas definem valores mínimos de frequências. Exemplificando, a norma brasileira - NBR 6118/2003 [37] define um comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, quando é respeitado a seguinte condição ( $f_{\text{natural}} > 1.2 f_{\text{critica}}$ ), onde  $f_{\text{critica}}$  toma o valor de 8 Hz para pisos sujeitos a actividades rítmicas. Já os investigadores Allen, Pernica e Rainer [3, 4] propuseram valores mínimos para a frequência natural das estruturas, sendo que 6 Hz é o valor recomendado para estruturas de betão sujeitas a actividades humanas rítmicas. Recomendam também que a frequência natural da estrutura seja 1.2 vezes maior do que a frequência do terceiro harmónico da carga referente à actividade praticada. Este tipo de critérios não vai ser abordado detalhadamente, não se enquadrando no objectivo desta dissertação.

Nesta secção apresenta-se resumidamente o conteúdo de algumas normas e guias práticos, que definem níveis máximos de vibrações para actividades rítmicas através de limites de acelerações, de modo a garantir as condições mínimas de conforto. Caso esses níveis de vibrações ultrapassem os limites de acelerações máximas, para além de diminuírem o conforto podem alterar a capacidade de trabalho e, em certos casos, até podem provocar implicações ao nível da segurança e saúde dos indivíduos [36]. Assim, vão ser revistos os seguintes documentos, o guia prático da American Institute of Steel Construction AISC [35], a Norma Canadiana - CAN3-S16.1 [4, 36] e a Norma ISO - International Standard ISO 2631-1 [22] e ISO 2631-2 [23].

### 2.3.1 Guia prático - AISC

O guia prático AISC (Floor Vibrations Due To Human Activity) foi actualizado em 2007, e está integrado uma série de publicações denominada Steel Design Guide Series, desenvolvido pelo American Institute of Steel Construction (AISC) [35]. Este Instituto elaborou um critério de excitação rítmica devido ao aumento dos problemas de vibrações induzidas por actividades rítmicas. O critério é baseado nas cargas e na resposta dinâmica, em termos de acelerações de pico, segundo as características dos elementos estruturais e dos carregamentos envolvidos. O guia prático foi posteriormente melhorado de forma a ser considerado o tipo de ocupação da estrutura. Na tabela 2.4 estão indicados os valores limite de aceleração recomendados para os diferentes tipos de uso. Este guia foi desenvolvido e direccionado para estruturas de aço. Tendo em conta que os limites de aceleração apresentados apenas dependem do tipo de uso da estrutura, utiliza-se também na verificação de vibrações de estruturas de betão armado.

Tabela 2.4: Limites de acelerações recomendadas de vibrações [35].

Tipo de ocupação do edifício	Acelerações limite (% g)
Escritórios ou residências	0.4-0.7
Refeitórios ou ginásios de musculação	1.5-2.5
Actividades rítmicas	4-7

### 2.3.2 Norma Canadiana - CAN3-S16.1

A norma CSA - Canadian Standard Association - CAN3-S16.1, baseada no trabalho de Allen e Rainer [4, 36], define um critério de conforto dando relevância a pisos de escritórios, escolas e residências. Este critério estabelece limites para aceleração de pico em termos da sua frequência natural e o respectivo amortecimento, como ilustra a 2.5.

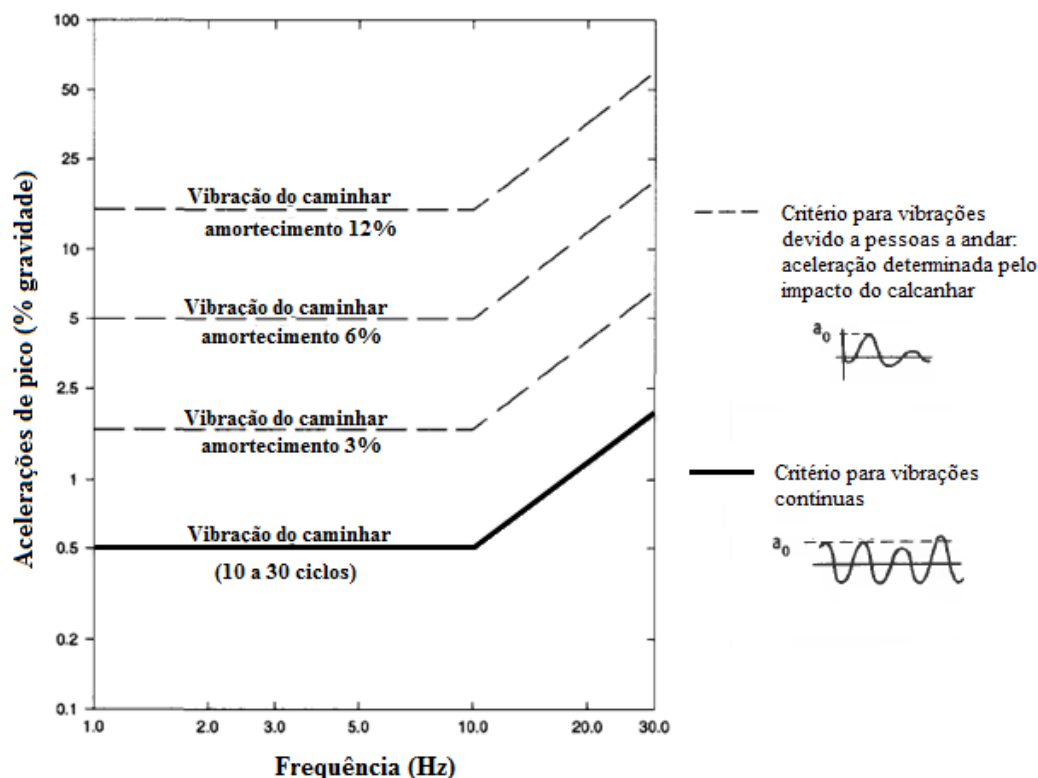


Figura 2.5: Valores limites recomendados de acelerações para actividades humanas (caminhar), adaptado de [4].

Estas características foram determinadas experimentalmente a partir de ensaios do impacto do calcanhar ("heel drop"), em que se projecta o calcanhar sobre o piso após se elevar o pé até uma altura, que depende do peso do indivíduo. Este ensaio é bastante utilizado para determinação de frequências naturais e acelerações de pico, de forma simples e rápida [26]. O ensaio mostra excelentes resultados de frequências obtidas entre valores de 2-15 Hz, correspondendo a frequências mais propícias à ocorrência de vibrações [9]. A figura 2.6 demonstra a resposta deste tipo de impacto em termos de aceleração de pico, no momento do impacto do calcanhar com o piso.

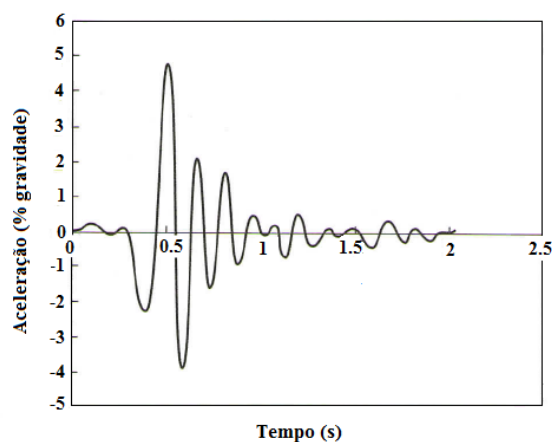


Figura 2.6: Exemplo da resposta obtida no momento do impacto do calcanhar sobre um piso [26].

### 2.3.3 Norma Internacional - ISO 2631-1 e ISO 2631-2

A norma ISO 2631-1 [22] serviu como base nos últimos anos à avaliação dos níveis de vibração nos indivíduos nas mais diversas circunstâncias. Esta norma destaca alguns dos factores que mais influenciam o nível de percepção e de sensibilidade dos indivíduos às vibrações, como por exemplo, a posição do corpo humano (deitado, sentado ou em pé), figura 2.7, as características da fonte de excitação, o tempo de exposição, as características do piso e o tipo de actividade praticada.

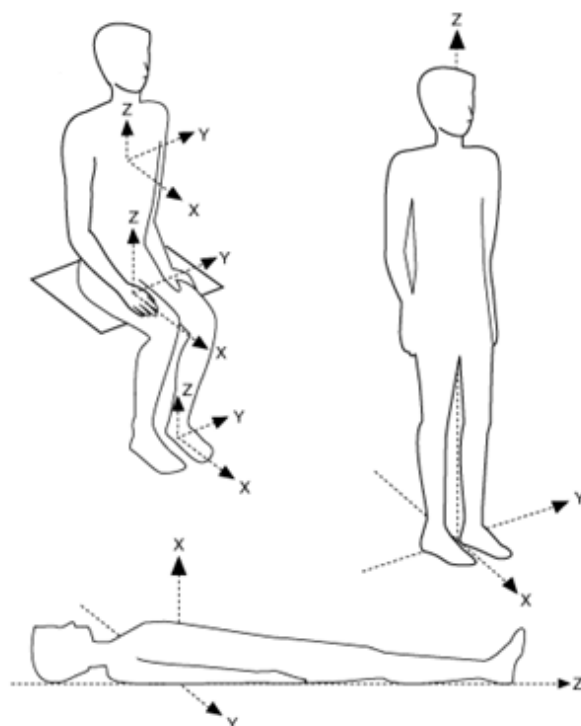


Figura 2.7: Direcções de medição de vibrações do corpo humano [22].

Quanto ao nível de percepção dos indivíduos, a norma [22] divide as vibrações em quatro categorias distintas, sendo as duas primeiras aceitáveis na concepção de um projecto:

- as vibrações não são perceptíveis pelos ocupantes, embora existam;
- as vibrações são sentidas pelos ocupantes mas não são incomodativas;
- as vibrações incomodam e são irritativas;
- as vibrações são graves que podem pôr em causa a estrutura e incomodam fracamente os ocupantes.

A maioria dos ensaios e investigações que deram origem a esta norma estabelecem critérios para a vibração na faixa de frequência entre 1 Hz e 80 Hz.

A segunda edição da norma ISO 2631-1 [22] editada em 2003, inclui os resultados das novas investigações, ISO 2631-2 [23]. Na figura 2.8 estão definidos os limites máximos de acelerações de pico, de forma a avaliar o grau de aceitabilidade à exposição de vibrações. Estes valores limite podem apresentar variações entre 0.8 a 1.5 vezes os valores recomendados.

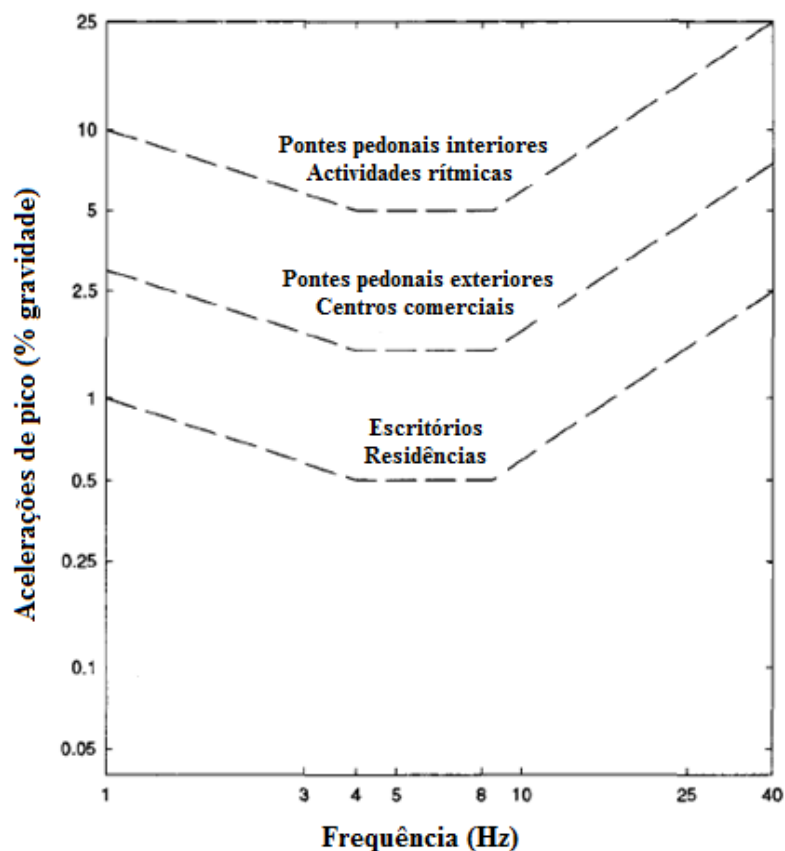


Figura 2.8: Limites de conforto máximos recomendados em termos de acelerações de pico para actividades humanas [23].

No entanto, os valores de acelerações de pico são normalmente válidos para impactos de curta duração, onde indicam somente a ocorrência de picos, não tendo em consideração o tempo de duração da actividade. Esta norma também sugere limites de acelerações sobre a forma de RMS (Root Mean Square), a qual tem em conta o tempo de duração e a frequência da estrutura, tornando-a relevante para estabelecer comparações com as acelerações obtidas [23, 35].

A figura 2.9 representa os critérios de conforto em acelerações em RMS para acelerações verticais em geral. Quando se utiliza como critério limite para actividades rítmicas em pisos, a curva limite deve ser multiplicada por valores entre 55 e 97, de forma a serem comparados com as acelerações obtidas a partir da análise dinâmica [44].

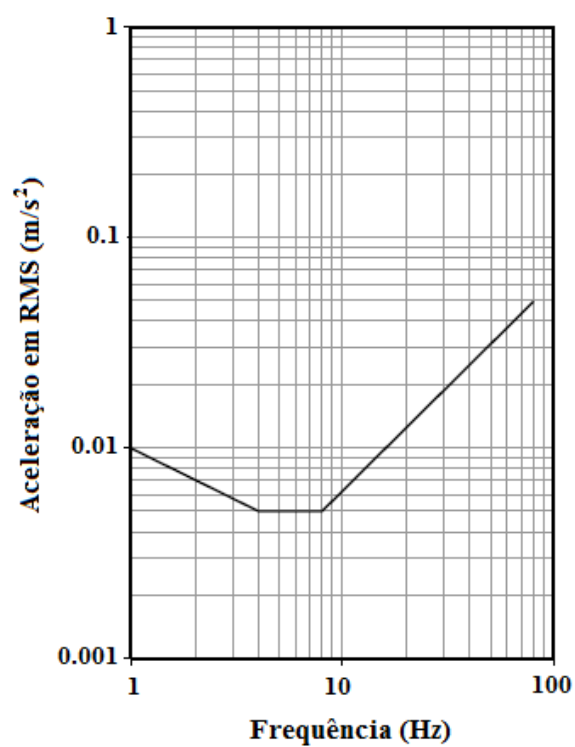


Figura 2.9: Curva limite para critérios de conforto em acelerações RMS segundo o eixo z [23].

Os critérios da tabela 2.4 e das figuras 2.8 e 2.9 vão ser utilizados como referência para as comparações efectuadas no capítulo 5.



## Capítulo 3

# Identificação dinâmica

### 3.1 Introdução

O estudo experimental das propriedades dinâmicas de estruturas de engenharia civil assume um interesse evidente na validação de modelos analíticos utilizados na caracterização da resposta de estruturas às acções dinâmicas, como o vento, os sismos e o tráfego rodoviário e pedonal [43]. Esses estudos experimentais permitem caracterizar o estado actual da estrutura, através de vários métodos, identificando assim, possíveis alterações (danos) das características dinâmicas definidas em projecto.

Neste capítulo apresenta-se uma descrição sumária dos tipos de ensaios que se efectuam em estruturas de engenharia civil, com base em respostas provenientes de acções externas. São também abordados alguns dos métodos de identificação modal, no domínio da frequência e do tempo, que permitem avaliar as características dinâmicas de estruturas. Finalmente, são apresentados alguns conceitos básicos da análise e processamento dos sinais, que visam corrigir os erros provenientes da aplicação dos métodos estocásticos.

### 3.2 Técnicas de ensaios experimentais

Existem várias técnicas de medição que visam a identificação experimental das características dinâmicas de estruturas. A utilização destas técnicas tem sido progressivamente alargada nas mais diversas áreas de engenharia (mecânica, civil, electrónica, entre outras). A identificação experimental das propriedades modais das estruturas pode-se realizar através de três tipos de técnicas:

- ensaios de vibração forçada: relacionam uma excitação conhecida produzida artificialmente, com a resposta estrutural;
- ensaios de vibração ambiental: relacionam uma excitação desconhecida, com a resposta da estrutura;
- ensaios de medição da resposta das estruturas em regime livre.

Os ensaios de vibração forçada, designados na literatura como "*Input-Output*", consistem na aplicação de uma excitação identificável num ponto ou em vários pontos duma estrutura e na medição da respectiva resposta [15]. Estas excitações são produzidas por diversos equipamentos, como por exemplo, o martelo de impulso, figura 3.1(a) ou o agitador electrodinâmico (shaker), figura 3.1(b).

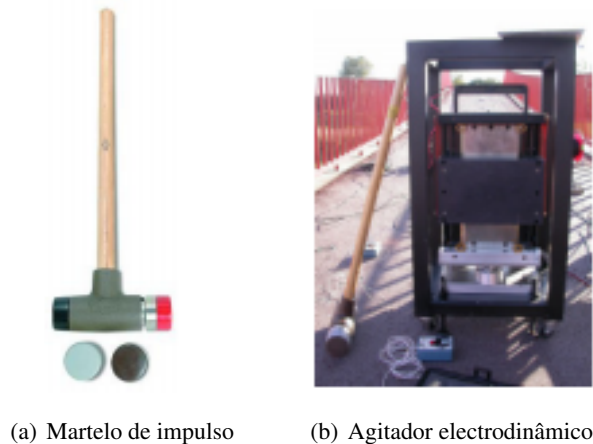


Figura 3.1: Exemplos de equipamentos utilizados nos ensaios de vibrações forçadas [15].

Uma vez produzida a excitação artificial, torna-se possível efectuar uma estimativa das funções de resposta em frequência (FRF) que relacionam as respostas medidas nos diversos pontos com as forças aplicadas [43]. Estas funções possibilitam uma caracterização do comportamento dinâmico da estrutura. Para esta caracterização, tendo como base ensaios de vibrações forçadas, utiliza-se uma identificação do tipo determinística [15], também designada como processo tradicional de análise modal experimental (EMA).

Em estruturas de pequenas dimensões, este tipo de ensaios podem ser efectuados em condições laboratoriais, tornando-se mais fácil a utilização de equipamentos que permitam, de alguma forma, excitar a estrutura. No entanto, não se consegue de forma rigorosa, reproduzir as condições de fronteira reais. Por outro lado, atendendo ao grande porte da maioria das estruturas de engenharia civil, o recurso a equipamentos de excitação torna-se mais problemático devido aos elevados custos e à dificuldade de se conseguir níveis de força capazes de excitar adequadamente as estruturas [49]. Nestes casos, é comum, recorrer-se a ensaios de vibração ambiental, uma vez que não necessitam de uma excitação induzida artificialmente para se conseguir obter os parâmetros modais da estrutura.

Os ensaios de vibração ambiental "*Output-Only*" estão associados a excitações induzidas por acções dinâmicas, como o vento, o tráfego, os sismos, ou até mesmo as actividades humanas. Neste tipo de ensaios não existe controlo das acções, nem existe a possibilidade de as conhecer ou medir para efeitos de identificação modal [12, 34]. Para este tipo de vibrações é feita uma identificação modal estocástica, também conhecida por análise modal operacional (OMA), permitindo assim, estimar as propriedades dinâmicas de uma estrutura, como as frequências naturais, os modos de vibração e os coeficientes de amortecimento. No entanto, importa referir que em ensaios de vibração ambiental as estimativas dos coeficientes de amortecimento não são fáceis de identificar, podendo recorrer-se nestes casos, a outros tipos de ensaios mais fiáveis, como por exemplo, o ensaio de vibração livre.

Dado que as acções ambientais não são conhecidas do ponto de vista determinístico, é necessário assumir uma hipótese quanto às suas características. Assim, as forças de excitação são consideradas através de um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco com média nula. Assume-se uma excitação de ruído branco, aquela que é caracterizada por ter uma distribuição em frequência constante garantindo que uma estrutura é excitada, em todas as frequências [34].

Os parâmetros modais são identificados a partir de dados experimentais obtidos através de sensores de medição, como por exemplo, velocímetros, figura 3.2(a) ou acelerómetros, figura 3.2(b).



(a) Velocímetro MR2003+

(b) Acelerómetro MR2002+

Figura 3.2: Equipamentos (sensores) utilizados em ensaios de vibração [46].

A ideia base para a identificação estocástica através de ensaios de vibração ambiental, está representada esquematicamente na figura 3.3.

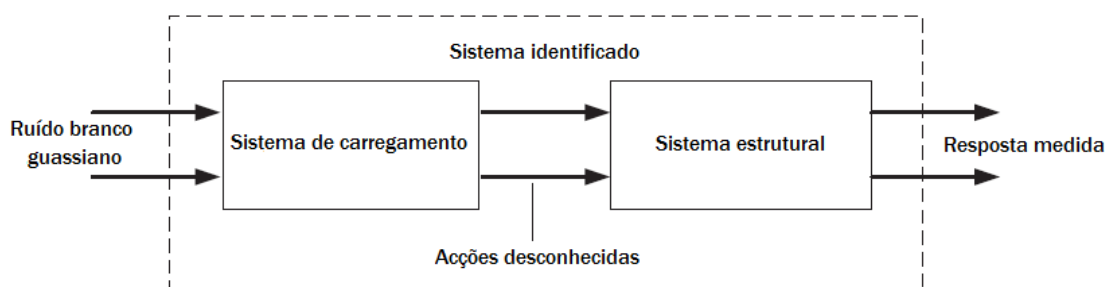


Figura 3.3: Esquema da identificação estocástica através de ensaios de vibração ambiental, adaptado de [21].

Como base nesta técnica de vibração, é possível realizar uma monitorização contínua da estrutura ao longo do tempo, uma vez que não é necessário introduzir qualquer restrição ao funcionamento normal de uma estrutura. Assim, consegue-se monitorizar uma estrutura permitindo identificar uma possível alteração dos parâmetros modais da estrutura.

Outro tipo de ensaio de medições, menos utilizado, são as vibrações em regime livre. Neste tipo de análise é medida e analisada a resposta de uma estrutura a uma deformação inicial imposta, sendo posteriormente libertada, deixando-a vibrar livremente [12]. Desta forma, é possível estimar as propriedades dinâmicas da estrutura, sendo que os coeficientes de amortecimento são identificados, com maior facilidade neste tipo de vibrações.

### 3.3 Técnicas de identificação modal

De forma a identificar experimentalmente, as propriedades dinâmicas de uma estrutura é necessário estudar a sua resposta num grande número de pontos, sendo para isso necessário recorrer a um grande número de sensores. Como isso nem sempre é possível, torna-se necessário realizar as medições de resposta em diversos ensaios, que são efectuados de forma sequencial nos pontos escolhidos. Para

garantir que os ensaios efectuados nos pontos escolhidos estão todos relacionados entre si, é obrigatório em todos os ensaios, pelo menos um dos sensores permanecer sempre no mesmo ponto.

Como foi referido anteriormente, a utilização de processos estocásticos assume particular interesse quando se está perante excitações de natureza desconhecida.

As técnicas de identificação estocástica são divididas em dois grupos distintos [34], diferenciando-se pelo tipo de dados utilizados na identificação dos parâmetros pretendidos. Um primeiro grupo que corresponde aos métodos de análise no domínio da frequência, baseando-se em estimativas espectrais da resposta da estrutura e um segundo grupo que corresponde a métodos no domínio do tempo, utilizando como base as séries temporais da resposta da estrutura.

Nas secções 3.3.1 e 3.3.2 apresenta-se uma breve descrição dos conceitos relativos aos métodos estocásticos, que se encontram implementados no *ARTeMIS*. O programa *ARTeMIS* é um programa comercial de fácil utilização (automática) que permite a identificação dos parâmetros modais de uma estrutura, estando a ser cada vez mais utilizado na análise de estruturas de engenharia civil.

É de salientar que a análise do comportamento dinâmico da estrutura é efectuada assumindo simplificadamente a hipótese de um comportamento elástico linear cujas características estruturais são invariantes no tempo [21].

Os fundamentos e detalhes dos métodos de identificação modal que permitem a compreensão dos mesmos podem ser encontrados nas referências [7, 8, 11, 29, 34, 43].

### 3.3.1 Identificação modal no domínio da frequência

As técnicas de identificação modal no domínio da frequência que se têm mostrado mais promissoras são o método básico (BFD), também conhecido por método da selecção de picos, o método de decomposição no domínio da frequência (FDD) e o método melhorado de decomposição no domínio da frequência (EFDD). É de referir que apenas os métodos FDD e o EFDD estão implementados no *ARTeMIS*, sendo este último o mais utilizado na caracterização dinâmica de uma estrutura.

A aplicação de qualquer um destes métodos aos registos de medições assenta na utilização das estimativas de funções de densidade espectral de potência da resposta [12], obtidas com base na aplicação de técnicas não-paramétricas, neste caso, o algoritmo *Fast Fourier Transform* (FFT). A decomposição das séries temporais no domínio da frequência, utilizando o conceito associado às séries de Fourier, permite um total acesso a uma variada gama de valores de frequências. As funções de densidade espectral são de carácter real e quantificam a distribuição do conteúdo energético de um sinal (série temporal) em frequências, possibilitando avaliar o comportamento dinâmico da estrutura.

Os métodos de identificação modal no domínio da frequência assentam em determinados pressupostos que devem ser respeitados para que se consigam obter resultados satisfatórios, nomeadamente, a excitação ser do tipo ruído branco, o amortecimento da estrutura ser reduzido e os modos de vibração, com frequências próximas, serem ortogonais [34].

É importante referir que se a excitação ambiental fosse um ruído branco perfeito e não houvesse nenhum ruído nos ensaios efectuados, os picos de ressonância encontrados correspondiam exactamente aos modos fundamentais da estrutura.

#### **BFD**

O método de identificação modal estocástico mais conhecido e utilizado em diversas aplicações em engenharia civil é o método básico no domínio da frequência (BFD) ou também designado pelo método da selecção de picos. É fundamentado num processamento de sinais usando a transformada discreta de Fourier (DFT) através do algoritmo da FFT. A aplicação deste algoritmo permite obter estimativas das funções de densidade espectral. Nestas funções, as frequências naturais estão associados às frequências dos picos de ressonância e os coeficientes de amortecimento são reflectidos pela largura desses picos. Os modos de vibração dependem da relação entre as funções de densidade espectral, tendo por referência um ponto medido.

Este método de identificação fornece estimativas razoáveis de frequências naturais e de modos de vibração, se os picos estiverem bem separados entre si [43]. Caso tal não aconteça, o método não é capaz de separar as contribuições de cada modo da resposta obtida experimentalmente. Uma limitação deste método é a sua aplicação em estruturas de engenharia civil que apresentem modos de vibração muito próximos.

É importante referir que este método não identifica propriamente os modos de vibração mas sim modos operacionais de deformação, sendo estes uma combinação de todos os modos de vibração. Além disso, os modos obtidos por este método não coincidem com os modos de vibração teóricos, uma vez que representam a configuração deformada que a estrutura assume quando excitada por um harmónico puro [43].

Para além da identificação das frequências naturais e dos modos de vibração, este método também permite estimar coeficientes de amortecimento modal, utilizando técnicas apropriadas para analisar as funções de densidade espectral da resposta. As técnicas utilizadas são o método da meia potência [43] ou o método de ajuste dum espectro analítico de um sistema de um grau de liberdade. Littler [28] afirma que este último é mais adequado do que o método da meia potência para estimar os coeficientes de amortecimento a partir da análise dos registos de ensaios de medição de vibrações ambiente.

#### **FDD**

O método de decomposição no domínio da frequência (FDD) é mais eficaz que o anteriormente descrito, uma vez que resolve as limitações do método BFD, permitindo a identificação de modos de vibração com frequências próximas. Este método pode ser entendido como uma extensão do método BFD, na medida em que se desenvolve a partir das estimativas das funções de densidade espectral da resposta.

O método FDD efectua uma decomposição da matriz das funções de densidade espectral num conjunto de funções de um grau de liberdade através da aplicação do algoritmo matemático da decomposição em valores singulares (SVD) [29]. A cada função de densidade espectral corresponde um sistema de um grau de liberdade com as mesmas frequências dos modos de vibração da estrutura. Os valores singulares são estimativas das funções de densidade espectral dos sistemas de um grau de liberdade e os vectores singulares são estimativas da forma dos modos de vibração. Na figura 3.4, está representado um exemplo de um espectro de funções de densidade espectral, utilizando o método FDD.

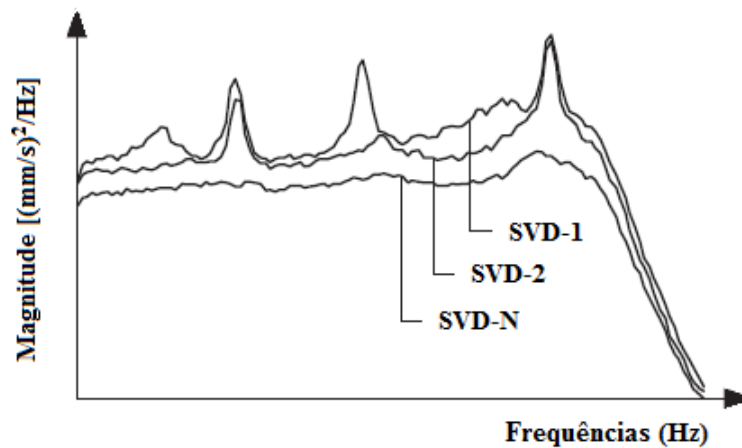


Figura 3.4: Exemplo de um gráfico de funções de densidade espectral, utilizando o FDD [21].

Importa referir que com este método, apenas é possível identificar as frequências naturais e avaliar as configurações modais da estrutura, não sendo possível obter os coeficientes de amortecimento.

A análise do método FDD [34] é dividida nos seguintes pontos:

- avaliação das funções de densidade espectral da resposta;
- decomposição em valores singulares da matriz de funções de densidade espectral;
- análise dos espectros de valores singulares para selecção dos picos de ressonância correspondentes aos modos de vibração;
- avaliação das configurações modais segundo os graus de liberdade observados, através dos vectores singulares.

### EFDD

O método EFDD é uma versão melhorada do método de decomposição no domínio da frequência, sendo considerado um aperfeiçoamento do método FDD, que permite estimar os coeficientes de amortecimento modal e identificar de forma mais rigorosa, tanto as frequências naturais como as configurações modais.

Este método é dividido em duas fases [34], uma primeira corresponde ao método FDD e uma segunda que incorpora vários passos, sendo importante para a presente dissertação referir os seguintes:

- introdução de um procedimento, que permite estimar as funções de densidade espectral associadas a cada modo de vibração, a partir dos espectros de valores singulares;
- transformação, para o domínio do tempo, das funções de densidade espectral associadas a cada modo de vibração, aplicando-lhes a inversa da transformada discreta de Fourier (através do algoritmo da *IFFT*), determina-se as funções de auto-correlação da resposta, obtendo-se as estimativas dos coeficientes de amortecimento modais e das frequências naturais.

De forma a efectuar a comparação entre os vectores singulares das frequências vizinhas com o vector singular correspondente à frequência de ressonância é utilizado um coeficiente denominado de critério MAC (Modal Assurance Criterion) que mede a correlação entre as configurações modais analíticas e/ou experimentais [1]. A expressão 3.1 define o coeficiente MAC.

$$MAC_{ij} = \frac{\Phi_i^T \Phi_j}{(\Phi_i^T \Phi_i) (\Phi_j^T \Phi_j)} \quad (3.1)$$

em que,  $\Phi_i$  e  $\Phi_j$  são dois vectores que contêm as configurações modais a comparar.

Este coeficiente pode variar entre 0 e 1. Os elementos da diagonal principal dessa matriz devem apresentar valores próximos de 1 ( $> 0,8$ ) para que se considere que existe uma boa correlação entre as componentes modais analíticas e/ou as experimentais. Por outro lado, valores próximos de 0 indicam que a correlação é muito baixa.

Em todas as técnicas de identificação modal estocástica, anteriormente referidas, existe a capacidade de distinguir, entre os vários picos identificados, aqueles que correspondem aos modos fundamentais da estrutura. Para isso, é necessário recorrer a funções de coerência, que estabelecem uma relação entre as várias funções de densidade espectral obtidas nos diferentes pontos [18]. Estas funções fornecem informações sobre o grau de linearidade entre os sinais obtidos pelos sensores, sendo também utilizados para avaliar o nível de ruído. Valores próximos de 1 mostram uma elevada relação de linearidade entre dois sinais, no entanto, valores próximos de 0 indicam uma baixa coerência entre os sinais, traduzindo em níveis de ruído elevados.

#### 3.3.2 Identificação modal no domínio do tempo

Deste grupo fazem parte as técnicas de análise no domínio do tempo, também designadas por métodos paramétricos, através das quais é efectuado um ajuste de modelos às funções de correlação da resposta, ou então, um ajuste directamente às próprias séries temporais de resposta. Este último ajuste é feito directamente sobre os dados das séries temporais originais obtidos a partir dos sensores de medição.

Os métodos implementados no programa *ARTEMIS* são designados por SSI-DATA (Driven Stochastic Subspace Identification) e identificam as características dinâmicas, sem necessidade de recorrer a estimativas de funções de correlação ou de densidade espectral. Nestes métodos, o tratamento de dados consiste na projecção do espaço das saídas futuras sobre o espaço das saídas passadas. A ideia é apenas tomar os resultados de referência em vez de todos os resultados passados, reduzindo assim, as dimensões do problema e o tempo de cálculo [41].

No programa *ARTEMIS* estão inseridos estes métodos com as variantes de SSI-UPC (Unweighted Principal components - Componente principal não ponderada), SSI-PC (Principal Components - Componente principal) e do SSI-CVA (Canonical Variate Analysis - Análise canónica), sendo os dois primeiros os mais utilizados na identificação modal de estruturas [21]. Estas técnicas incorporam formas eficazes de lidar com o ruído, excluindo-o da identificação dos modos naturais da estrutura.

Para a análise de identificação modal através destes métodos, são utilizados diagramas de estabilização. Um diagrama de estabilização é um gráfico em que nas abscissas indicam as frequências dos pólos e as ordenadas indicam a ordem da matriz do modelo em estudo. De entre os pólos identificados, o diagrama ajuda a seleccionar aqueles que correspondem a modos naturais de vibração de um sistema, permitindo

distingui-los daqueles que são pólos de ruído, numéricos ou computacionais ou que são resultantes das características das acções ambientais e não do sistema em si [43].

Os pólos identificados são ainda comparados em termos das características dinâmicas com o pólo de ordem imediatamente inferior. Se essa comparação não exceder os limites pré-definidos então os pólos são considerados estáveis, caso contrário são considerados instáveis [45]. Consegue-se obter então, um diagrama de estabilização, percorrendo toda a matriz de estado.

Na figura 3.5 apresenta-se um esquema de um possível diagrama de estabilização, onde a vermelho está representada uma série de pólos estáveis alinhados nas frequências, identificando assim modos naturais da estrutura. Nesta mesma figura, o ruído e os pólos instáveis estão representados a verde e amarelo, respectivamente, dispersos em diferentes frequências, não sendo assim considerados modos da estrutura.

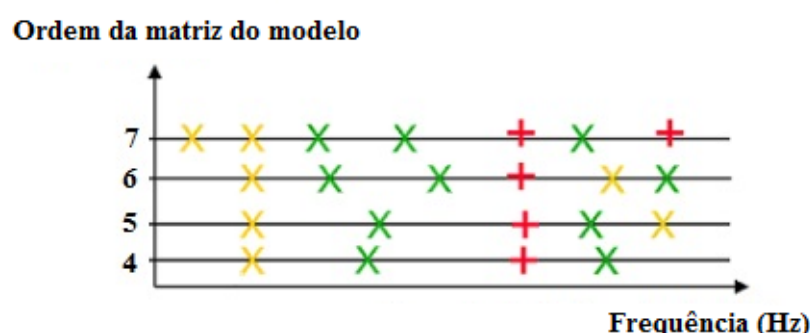


Figura 3.5: Esquema de um diagrama de estabilização [45].

Os métodos no domínio do tempo permitem avaliar com grande precisão as características modais das estruturas, no entanto, os cálculos efectuados são mais complexos, tornando a sua execução mais lenta do que a dos métodos no domínio da frequência [43]. Como os métodos no domínio do tempo identificam os parâmetros modais através de séries temporais a possibilidade de perda de informação ou falta de resolução de frequência é reduzida [45].

É importante referir, que no programa *ARTEMIS*, também existe a possibilidade de comparar os resultados obtidos por estes métodos, com os métodos do domínio da frequência e/ou com os resultados obtidos pelos ensaios experimentais, através do critério MAC, descrito na secção 3.3.1.

### 3.4 Análise e processamento de sinais

Com aparecimento dos sistemas digitais, foi possível armazenar um elevado número de dados a um custo relativamente baixo e o processamento de sinais tornou-se mais rápido, sendo assim simplificada a obtenção das características dinâmicas da estrutura [11]. Apesar da análise dos sinais medidos ser, muitas vezes, realizada no domínio do tempo, por observação visual, passou também a ser efectuada no domínio da frequência, de forma digital, através da utilização de filtros analógicos, como mostra a figura 3.6. Assim, na prática os resultados das medições são transformados de um sinal analógico (contínuo) para sinal digital (discreto), por um elemento de armazenamento que contém um *conversor analógico/digital* (A/D), que transforma esses dados para, posteriormente, serem analisados por um programa de processamento de sinais.



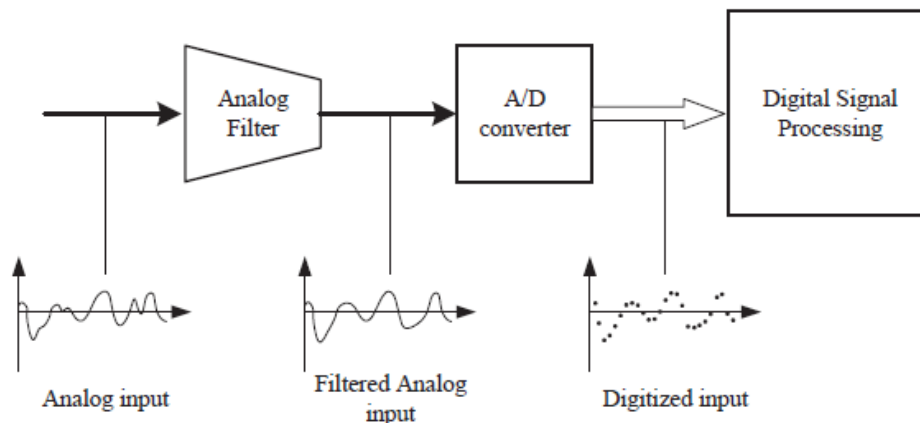


Figura 3.6: Processo de transformação de um sinal analógico em digital, com utilização de um filtro analógico [21].

Apresentam-se, de seguida alguns conceitos básicos da análise e do processamento de sinais, tendo sempre presente que esta dissertação não tem como objectivo abordar de forma exhaustiva esses aspectos. As referências [11, 34, 43] complementam a compreensão destes conceitos.

### Erros

Durante todo o processo referente à estimativa do conteúdo espectral são cometidos diversos erros provenientes quer do processo de medição quer da aplicação das técnicas de processamento de sinal [34]. Estes erros podem ser agrupados em três grupos, uma vez que têm geralmente origens e causas distintas:

- erros por sobreposição ("*aliasing errors*"), que surgem pelo facto de uma componente com uma frequência superior à frequência de Nyquist aparecer, incorrectamente, na série discreta como tendo uma frequência inferior;
- erros de carácter estatísticos, que se pode dividir em erros de viés ("*bias errors*"), que se manifestam através de desvios sistemáticos das quantidades estimadas em relação às quantidades reais e em erros de variância ("*random errors*"), que são caracterizados por desvios aleatórios relativamente à media estimada dessas quantidades;
- erros por escorregamento ("*leakage effect*"), que estão associados ao carácter finito das séries temporais e consistem num fenómeno que tem como consequência a distribuição da energia contida numa determinada frequência, por uma banda de frequências adjacentes a esta, fazendo com que a amplitude seja subestimada.

Estes erros estão associados ao carácter finito da análise espectral que é normalmente efectuada, sendo que são considerados erros importantes na análise e processamento de sinais [34]. De modo a minimizar esses erros, existem algumas técnicas capazes de prevenir ou reduzir estes efeitos.

Em relação aos erros de sobreposição, estes podem ser prevenidos ou reduzidos através do aumento da frequência de amostragem. No entanto, esta é uma técnica sem garantias de sucesso dado que à partida não se conhece o conteúdo espectral do sinal temporal. De forma mais fidedigna estes erros podem ser prevenidos, introduzindo um filtro analógico também designado por filtro "*anti-aliasing*",

como ilustra a figura 3.6, entre a saída do sensor e a entrada do elemento de armazenamento, para que elimine o contributo de todas as frequências acima da frequência de Nyquist (metade da frequência de amostragem).

Na figura 3.7(a), pode verificar-se claramente uma série discreta correctamente amostrada no domínio do tempo, uma vez que as características do sinal discreto descrevem correctamente o sinal contínuo. Na figura 3.7(b) apresenta-se um sinal discreto incorrectamente amostrado, ou seja, que tem as características de uma onda com uma frequência mais baixa, surgindo assim os erros de "*aliasing*".

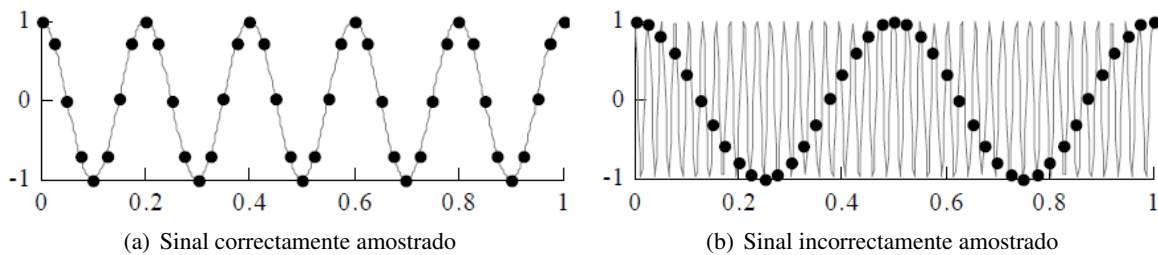


Figura 3.7: Exemplo do efeito da sobreposição num sinal contínuo, adaptado de [34].

Os erros de variância e viés devem-se ao facto do cálculo da estimativa espectral ser baseado numa só série temporal com uma duração finita [34]. Assim, parte deste erro pode ser minimizado, procedendo a uma divisão da série temporal em segmentos mais curtos. Efectuando posteriormente, a média das estimativas espectrais dos segmentos mais curtos, é possível obter uma estimativa mais alisada ("*smoothed*") da função de densidade espectral.

Quanto maior for o número das segmentos divididos, menor será a variância da estimativa. No entanto, a adopção de muitos segmentos leva a que estes sejam muito curtos e, daí advém um agravamento do erro de "*leakage*" e uma diminuição da resolução em frequência (aumento do espaçamento entre cada abcissa do espectro). Assim, uma forma bastante utilizada para se conseguir o número adequado de segmentos é através da adopção de alguma sobreposição ("*overlapping*") entre eles.

Uma das técnicas que permite com grande eficiência reduzir o erro de "*leakage*" consiste na aplicação de "janelas de dados" ou "janelas de processamento de sinal". O objectivo da aplicação de uma janela de dados é reduzir as descontinuidades do sinal periodizado nas fronteiras do tempo de amostragem, isto é, as janelas de dados ao serem aplicadas às séries temporais, introduzem neles, valores de zero no início e no fim do registo, para que o sinal possua um número inteiro de ciclos, minimizando-se assim o efeito de "*leakage*" [11]. No caso de sinais do tipo aleatório, ou seja, sinais temporais provenientes de ensaios de vibração ambiental, é normalmente utilizada a janela de Hanning. A utilização de janelas de dados de Hanning está normalmente associada a uma sobreposição de segmentos de 2/3, sendo a que optimiza o aproveitamento da informação contida nas séries temporais. No entanto, também é comum utilizar-se uma sobreposição de 1/2 [29, 34].

## Filtros

Considera-se fundamental antes dos ensaios, prevenir o aparecimento de erros e após a realização destes, proceder à eliminação ou minimização das componentes do sinal temporal que se revelem inúteis ou prejudiciais para o estudo a desenvolver, recorrendo, por exemplo, à aplicação de filtros, figura 3.8.



Figura 3.8: Exemplo representativo da aplicação de um filtro a uma série temporal.

Entende-se por filtro, um sistema capaz de modificar um sinal temporal, através da eliminação de determinada gama de frequências, deixando apenas, para analisar, uma determinada banda de interesse. Os filtros ideais básicos [11, 34] podem ser classificados da seguinte forma:

- passa-baixo, é um filtro que deixa passar todas as bandas de frequência, sem as atenuar, desde zero até à frequência de corte, impedindo completamente a passagem de frequências acima da frequência de corte;
- passa-alto, é um filtro com a função inversa do anterior, isto é, só permite a passagem de frequências acima da frequência de corte.
- passa-banda, resulta da associação em série de um filtro passa-baixo com um filtro passa-alto e permite eliminar a banda de frequências fora de um dado intervalo  $[\omega_1, \omega_2]$ , deixando passar toda a gama de frequências contida nesse intervalo.
- elimina-banda, resulta da associação em paralelo de um filtro passa-baixo com um filtro passa-alto e apenas impede a passagem da banda de frequências no intervalo  $[\omega_1, \omega_2]$ .

Os filtros ideais que acabam de ser definidos não existem. No entanto, é possível desenvolver filtros reais que, nas condições específicas em que vão ser utilizados, apresentam aproximações satisfatórias dos filtros com características ideais [34].

#### Decimação

No caso de estruturas de engenharia civil, a necessidade de se proceder à decimação de um sinal tem a ver, essencialmente, com a economia de espaço em memória e o tempo de cálculo [11]. Esta operação também tem interesse quando se pretende reduzir o tamanho das séries temporais para outras análises.

A decimação consiste em escolher um conjunto de dados, considerando uma frequência de amostragem inferior, eliminando assim os restantes dados. Aplicando este conceito, a série inicial dá origem a um novo intervalo de amostragem e, conseqüentemente, a uma nova frequência de Nyquist. Se se aplicar uma decimação de segunda ordem à série inicial, dá origem a uma frequência de Nyquist e a um intervalo de amostragem com metade do valor inicial; se se aplicar uma decimação de quarta ordem então será 1/4 do valor inicial e, assim sucessivamente.

No entanto, é importante ter em conta que toda a gama de frequências acima do novo valor da frequência de Nyquist, será dobrado para o novo intervalo, trazendo com isto erros de sobreposição. De forma a evitar estes erros, deve-se, anteriormente, filtrar as séries temporais com um filtro passa-baixo, eliminando assim, as frequências acima da nova frequência de Nyquist e então, só depois, aplicar a decimação às séries temporais.



## Capítulo 4

# Caso de estudo - Pavilhão Multidesportivo do Sporting

### 4.1 Introdução

Neste capítulo é efectuada a caracterização dinâmica do pavilhão Multidesportivo do Sporting Clube de Portugal (SCP), situado em Lisboa. Para tal, é elaborado um modelo de elementos finitos no programa de cálculo automático *SAP2000*, que acompanhado pela execução de um conjunto de ensaios in-situ permite caracterizar o estado actual da estrutura. Para o efeito é apresentada uma breve descrição da estrutura, definindo as propriedades geométricas dos elementos estruturais e as propriedades físicas dos materiais empregues.

Com os resultados obtidos nos ensaios, realiza-se um pré-processamento das séries temporais, através de procedimentos implementados no programa *Matlab* que juntamente com o programa *ARTEMIS*, avaliam a qualidade dos sinais. Procedeu-se também, à identificação modal no programa *ARTEMIS*, estimando as propriedades dinâmicas, tais como, as frequências e os respectivos modos de vibração.

Posteriormente, é feita uma revisão das opções da modelação dos elementos e das respectivas ligações estruturais, sendo de seguida, efectuado um estudo de sensibilidade dos parâmetros adoptados. Após a análise de várias tentativas de combinações o modelo foi actualizado tendo em conta os limites razoáveis, de modo a que as propriedades dinâmicas provenientes do modelo se aproximem o mais possível das obtidas experimentalmente.

Assim, tem-se como objectivo principal do presente capítulo, a comparação das propriedades dinâmicas do piso identificadas através dos ensaios efectuados in-situ, com as calculadas no programa de cálculo automático.

### 4.2 Descrição da estrutura

O Pavilhão Multidesportivo do SCP, exibido na figura 4.1(a), está localizado na zona de Lisboa, junto ao estádio de Alvalade e foi construído em 2003. A estrutura é composta por elementos estruturais em betão armado em que em algumas das vigas foi adicionado pré-esforço. O edifício é praticamente todo envidraçado, como se pode verificar na figura 4.1(b) e é composto por 4 pisos.



(a) Vista geral



(b) Foto do pavilhão em estudo

Figura 4.1: Pavilhão Multidesportivo do Sporting Clube de Portugal.

No piso -1 estão incorporadas duas piscinas para a prática de natação e pólo aquático. Nos pisos 0 e 1 inserem-se ginásios para a prática de aeróbica, danças e desportos de combate e ainda alguns espaços destinados a outras actividades. O último piso está destinado à prática de futsal e de andebol.

As figuras 4.2 e 4.3 apresentam um corte transversal e um corte longitudinal, respectivamente, do pavilhão multidesportivo.

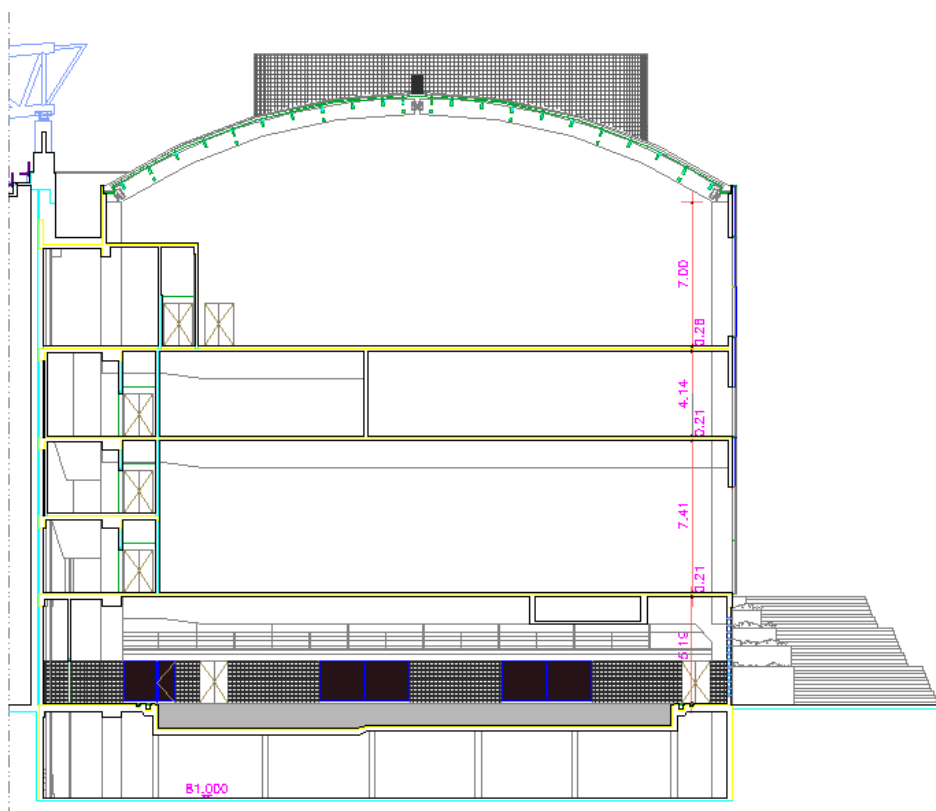


Figura 4.2: Corte transversal do pavilhão Multidesportivo do SCP.

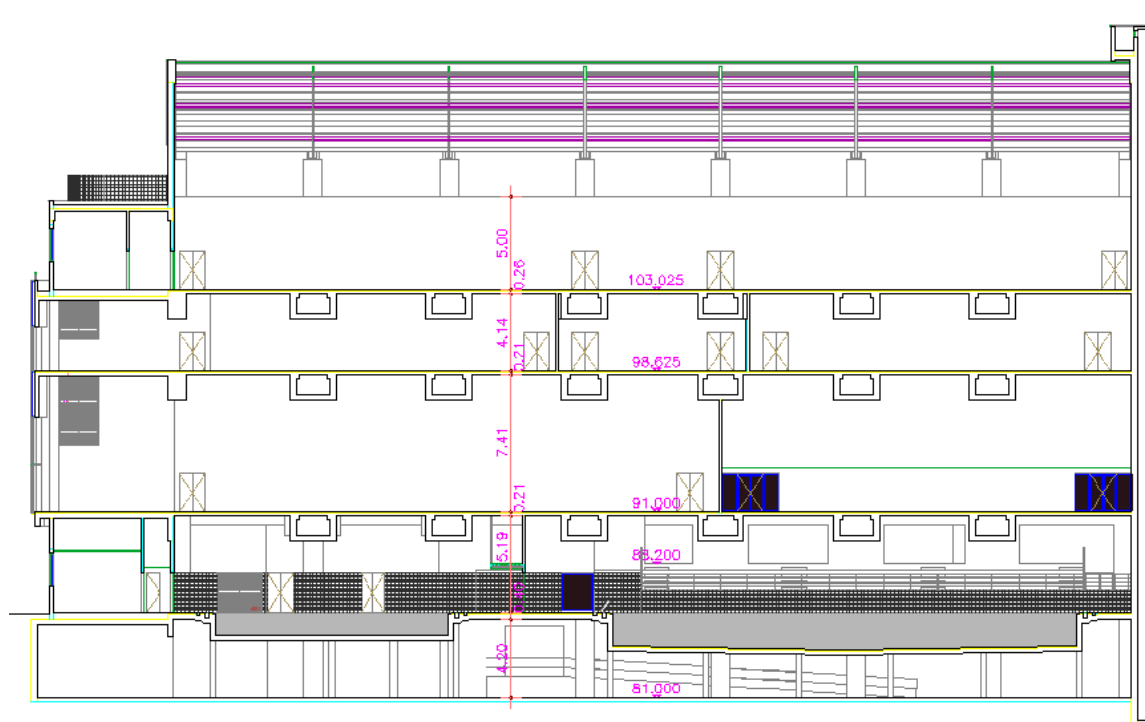


Figura 4.3: Corte longitudinal do pavilhão Multidesportivo do SCP.

Os pisos que constituem este pavilhão são compostos por uma laje rectangular com 52.35 m de comprimento e 30.8 m e largura. Adjacente a esta, existe ainda uma laje com a configuração representada na figura 4.4.

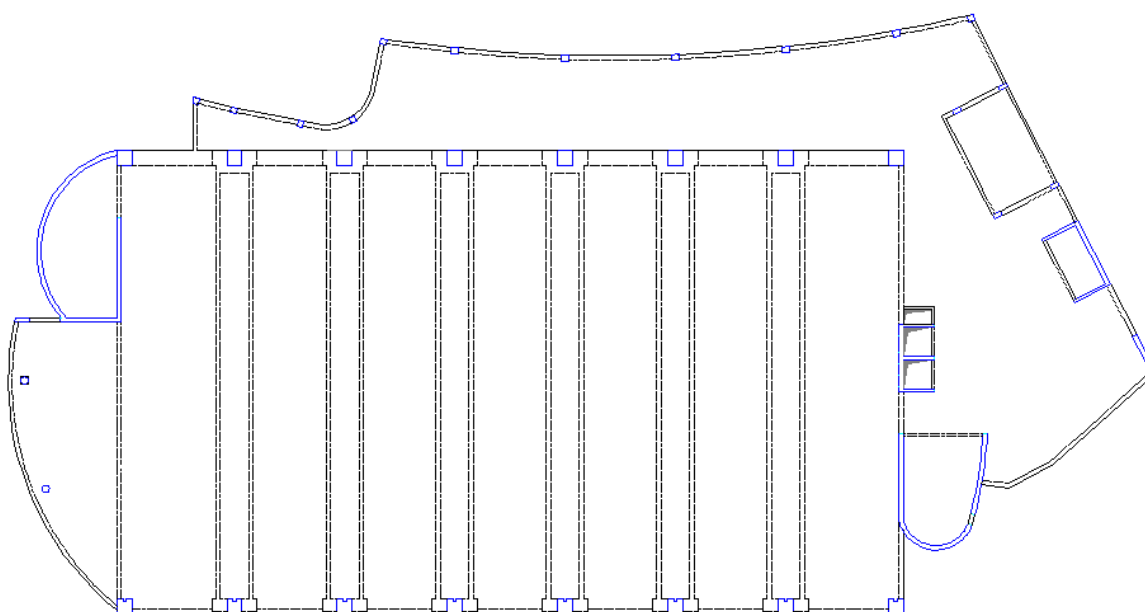


Figura 4.4: Exemplo de um piso do pavilhão Multidesportivo.

O estudo efectuada na presente dissertação destina-se à laje do piso 0 situada por cima das piscinas, a qual se encontra representada na figura 4.5.

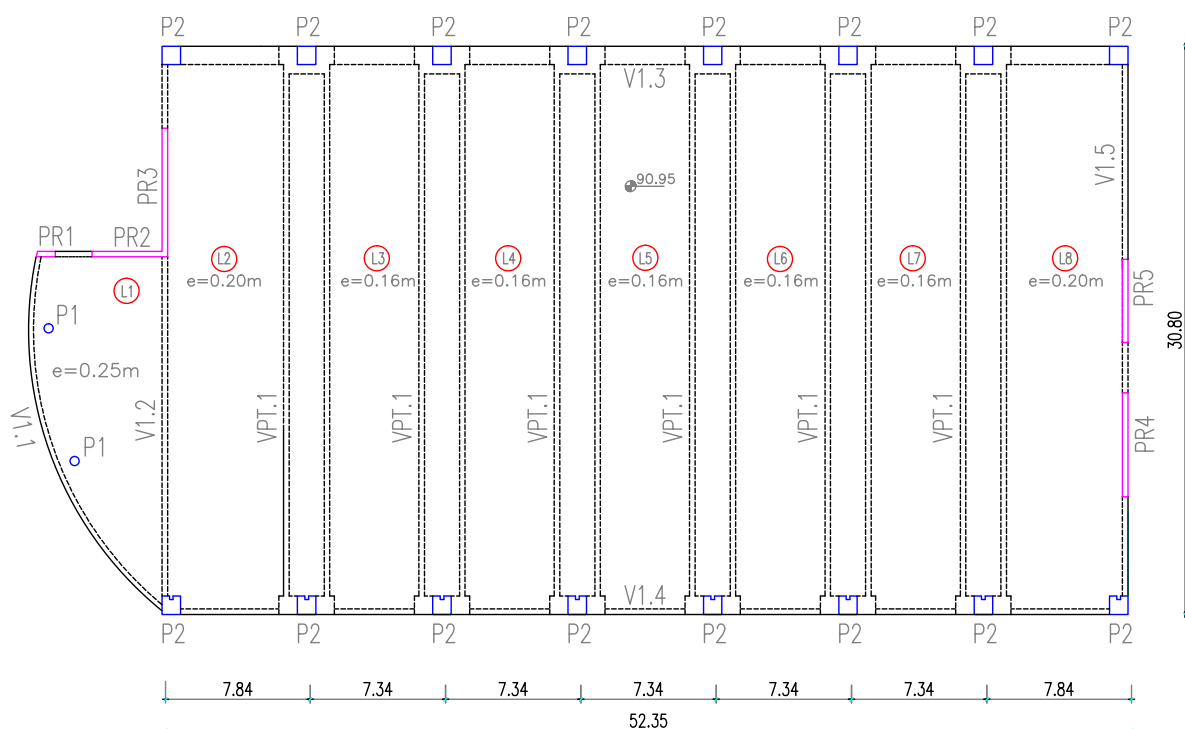


Figura 4.5: Representação da parte da laje em estudo.

As vigas centrais principais de betão armado (VPT.1) são constituídas por uma secção em caixão pré-esforçada, como representado na figura 4.6. As vigas (V1.2 a V1.5) são de secção rectangular. Todas as vigas estão apoiadas sobre pilares (P2) com secção quadrangular com  $1 \text{ m}^2$  de área ou em paredes resistentes (PR1 a PR5). Apenas foram consideradas as paredes resistentes que têm alguma conexão com as lajes da estrutura. Os pilares circulares (P1) apenas sustentam a laje com maior espessura.

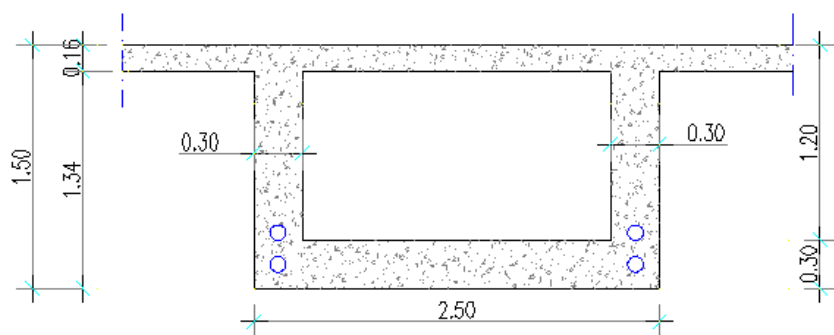


Figura 4.6: Secção transversal a meio vão da viga VPT.1.

A tabela 4.1 apresenta as características geométricas das secções transversais dos elementos estruturais do pavilhão multidesportivo.



### 4.3. MODELAÇÃO DA ESTRUTURA

Tabela 4.1: Características geométricas das secções transversais dos elementos estruturais

Elementos estruturais	Largura [m]	Altura [m]	Espessura [m]	Diâmetro [m]
Vigas	VPT.1	2.5	1.5	-
	V1.1 /V1.4	-	0.7	0.3
	V1.2 / V1.5	-	1.2	0.3
	V1.3	-	0.6	1
Pilares	P1	1	-	1
	P2	-	-	-
Paredes resistentes	PR1	0.94	-	0.3
	PR2	3.9	-	0.3
	PR3	6.97	-	0.3
	PR4	6.49	-	0.3
	PR5	4.5	-	0.3
Lajes	L1	-	-	0.25
	L2/L8	-	-	0.20
	L3 a L7	-	-	0.16

Todos os elementos são constituídos por betão de classe C30/37 e por aço do tipo A500 NR, excepto a viga VPT.1, que é constituída por betão de classe C40/50, armaduras de pré-esforço e armaduras do tipo A500.

Na tabela 4.2, indicam-se as principais características dos materiais utilizados: o módulo de elasticidade ( $E$ ), a peso volúmico ( $\rho$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Tabela 4.2: Características dos materiais empregues no piso em estudo.

Materiais	Características		
	$E$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\nu$
Betão C30/37	33	2400	0.2
Betão C40/50	35	2400	0.2
Aço A500NR	210	7860	0.3
Aço prEN10138	195±10	7850	0.3

### 4.3 Modelação da estrutura

A estrutura em questão foi modelada a partir de peças desenhadas, fornecidas pela administração do Sporting Clube de Portugal, utilizando o programa de cálculo automático *SAP2000* [13, 14]. A escolha deste programa, em detrimento de outro, está relacionada com a simplicidade da introdução de dados.

Inicialmente, a laje foi modelada com elementos do tipo *Membrana* e as vigas foram modelados com elementos *Barra* com recurso ao comando *Section Design*. A vantagem deste comando é permitir

desenhar elementos com secções transversais diferentes das pré-definidas no programa de cálculo. Apesar deste comando permitir considerar as armaduras longitudinais das secções que compõem a estrutura, estas não são contabilizadas no momento de inércia. Assim, de modo a serem contabilizadas as armaduras é necessário efectuar uma homogenização das secções individualmente, alterando as definições no comando *Set Modifiers*. Importa referenciar que em elementos do tipo *Membrana* a armadura colocada no programa é considerada para efeitos de rigidez e de massa.

Em seguida, é necessário modelar os quatro cabos parabólicos de pré-esforço, representados na figura 4.6, existentes nas vigas centrais, VPT.1. A força de pré-esforço não afecta o comportamento dinâmico das vigas de betão armado, pelo que as propriedades dinâmicas de uma estrutura podem ser determinadas por meio da teoria elástica linear com um aumento do momento equivalente de inércia da secção transversal da viga [20, 39]. Deste modo, no presente modelo foram consideradas apenas as armaduras provenientes das armaduras do pré-esforço modificando o momento de inércia das vigas centrais.

As acções que actuam sobre a estrutura são o peso próprio, as restantes cargas permanentes e as sobrecargas. O peso próprio é contabilizado automaticamente no programa, tendo em conta as características físicas e geométricas definidas na secção 4.2. As restantes cargas permanentes, como os tectos falsos e os revestimentos, foram definidas sobre todos os elementos *Membrana* com o valor de  $1 \text{ kN/m}^2$ . Do mesmo modo, as sobrecargas são definidas com o valor de  $5 \text{ kN/m}^2$  [38]. Quanto às paredes divisórias não foram consideradas no cálculo do modelo devido ao seu peso não aumentar significativamente o valor das restantes cargas permanentes.

Começou por elaborar-se um modelo prévio (M0) no programa de cálculo, englobando toda a estrutura até ao piso 0, como se observa na figura 4.7. No entanto, como os ensaios experimentais incidem apenas sobre um piso da estrutura e os modos globais da estrutura não influenciam significativamente o modo de vibração do piso em estudo, procedeu-se à elaboração de um modelo mais simples (M1), de forma a reduzir o esforço computacional associado.

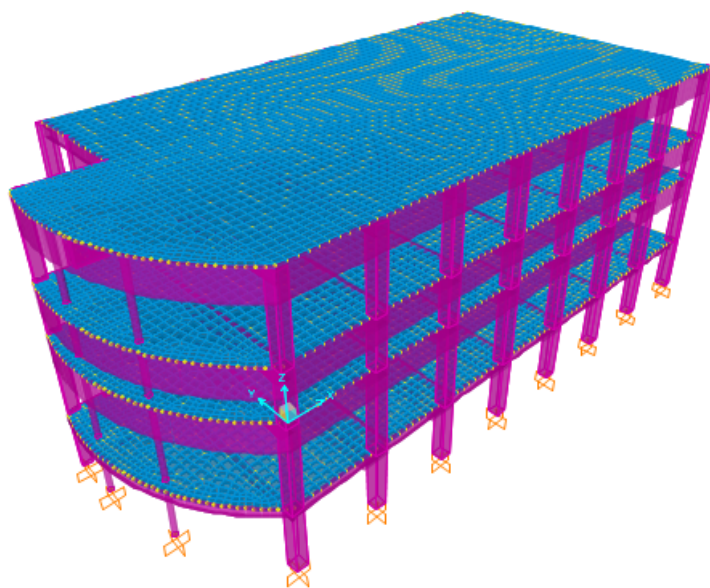


Figura 4.7: Modelo global (M0) do pavilhão multidesportivo.

### 4.3. MODELAÇÃO DA ESTRUTURA

Neste modelo M1, apresentado na figura 4.8, foi modelado apenas o piso onde seriam efectuadas as medições. Foram admitidos, de forma aproximada, que os elementos verticais estão apoiados a meia altura da laje superior e inferior. As extremidades dos elementos verticais foram consideradas simplesmente apoiadas, uma vez que o estudo efectuado apenas teve em conta os deslocamentos e as acelerações verticais da laje, ou seja, os modos verticais do piso. Teve ainda em conta o alinhamento dos elementos de forma a não existir sobreposição dos mesmos.

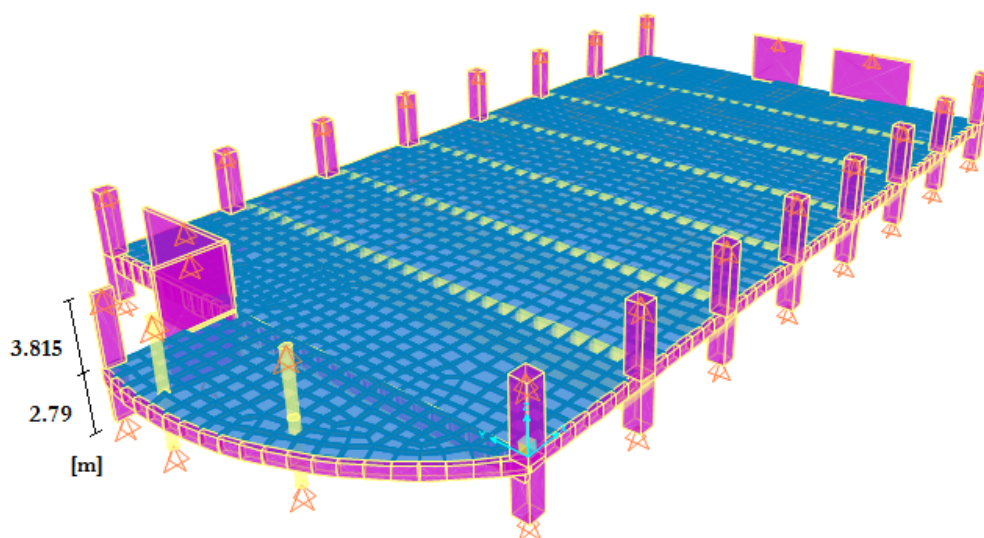


Figura 4.8: Modelo (M1) do piso para posterior análise.

No programa *SAP2000* todos os elementos estruturais são colocados no respectivo centróide e como as vigas se encontram abaixo da cota da laje, tornou-se necessário a utilização do comando *Insertion Point*. Este comando permitiu movimentar verticalmente o elemento estrutural (viga), até à cota inferior da laje, como apresentado na figura 4.9 permitindo uma melhor aproximação do comportamento real da estrutura.

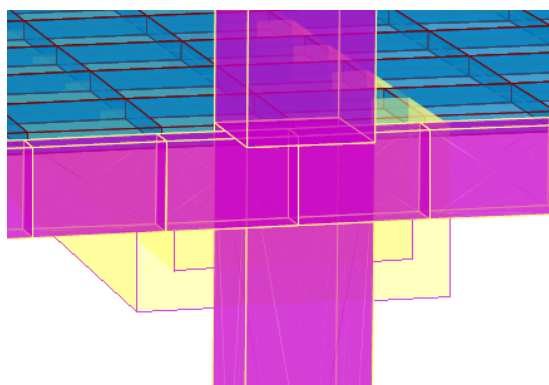


Figura 4.9: Pormenor da ligação entre os elementos estruturais no *SAP2000*.

O modelo M1, assim definido, foi utilizado como referência para a identificação modal, na definição da malha de pontos de medição e serviu como base de comparação das características dinâmicas, como as frequências e os modos de vibração.

Na figura 4.10 estão representados os modos de vibração predominantemente verticais com a indicação das respectivas frequências.

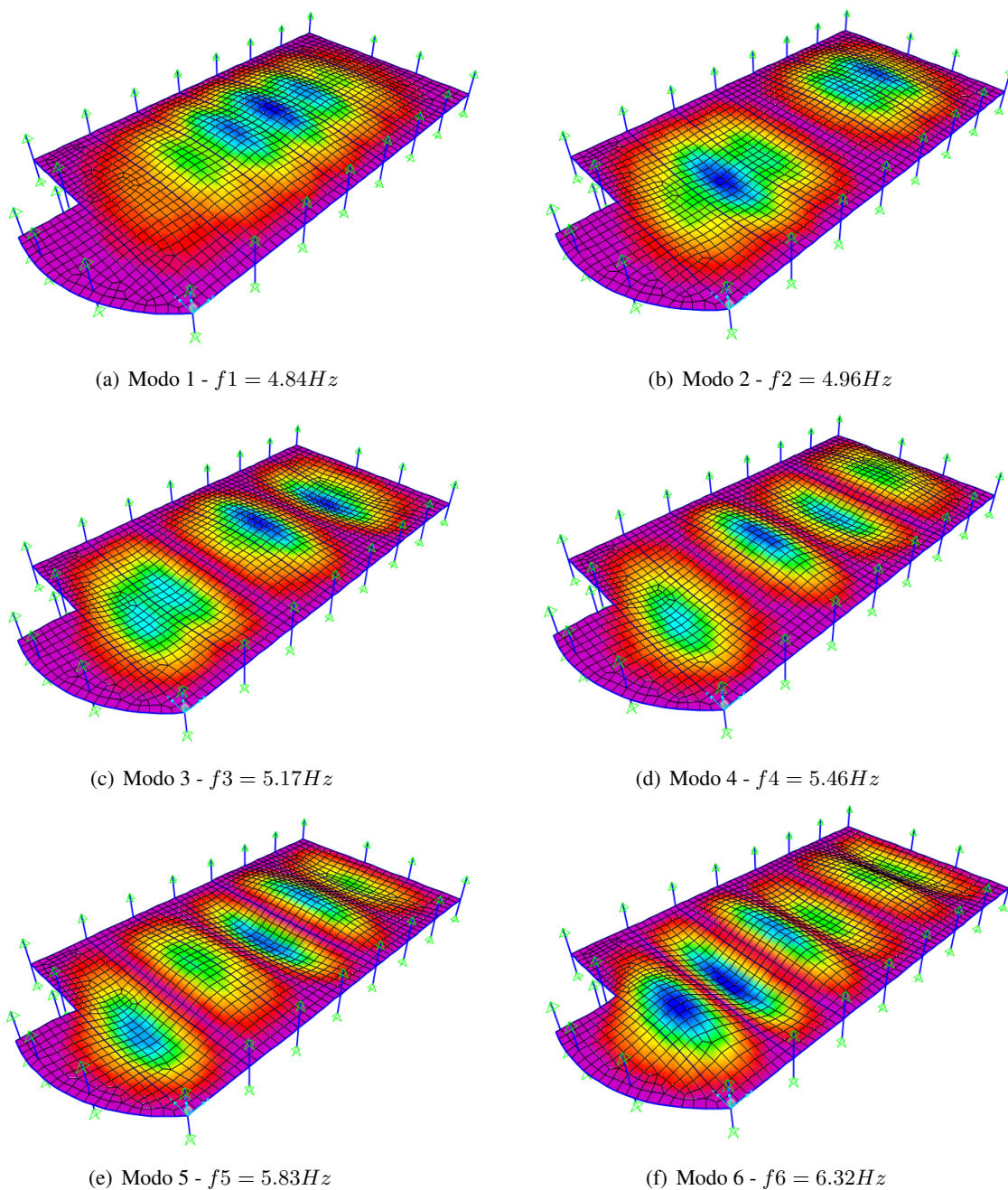


Figura 4.10: Modos de vibração com as respectivas frequências referentes ao modelo M1.

Observa-se que as frequências obtidas são relativamente baixas às propostas para estruturas de betão armado sujeitas a actividades rítmicas [3, 4]. No entanto, a frequência fundamental do piso está entre os valores das frequências encontradas pela análise da viga em caixão, apresentadas no anexo A.

## 4.4 Medições in-situ

Os ensaios experimentais tiveram como finalidade registrar as vibrações induzidas por acções ambientais. Foram também efectuados ensaios do impacto do calcanhar, de forma a registar a gama de frequência do piso. Os resultados obtidos a partir do modelo M1 foram utilizados para definir uma malha com o posicionamento dos aparelhos de medição.

### 4.4.1 Equipamento de medição

Estes ensaios experimentais foram realizados no dia 5 de Julho de 2013 entre as 19h00 e as 23h00, com recurso a aparelhos de monitorização, da marca *SYSCOM Instrument*, disponíveis no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia. Este equipamento [46], têm como principais componentes, as apresentadas na figura 4.11:

- *Redbox MR2002-CE*: elemento de processamento e armazenamento dos dados recolhidos;
- *Geofone MS2003 triaxial*: elemento de medição dos valores de velocidade em três direcções;
- Antena de *GPS*: elemento que permite manter a hora correcta em todos os elementos de processamento através de acesso GPS, o que possibilita a sincronização entre os vários geofones.

Todos estes componentes são conectados entre si através de cabos de comunicação, transmitindo toda a informação para o elemento de armazenamento. Para a definição e análise prévia dos ensaios experimentais utilizou-se um programa próprio *WinCom*.



Figura 4.11: Componentes do sistema de monitorização MR2002-CE [58].

O princípio de funcionamento deste tipo de geofones pode ser visto no esquema da figura 4.12 [46], onde a massa suspensa, ligada a uma mola, move uma bobina e cria um campo magnético. Este movimento da bobina produz uma corrente que é proporcional à velocidade medida. Em relação à massa, esta comporta-se como um sistema de um grau de liberdade. Este tipo de sensores transformam um fenómeno físico num analógico.



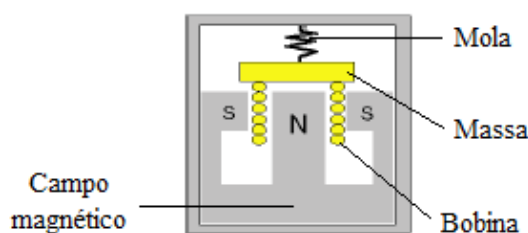


Figura 4.12: Mecânica do Geofone MS2002-CE triaxial [46].

Segundo o manual de utilização do equipamento, estes sensores podem registar valores de frequência entre 1 Hz e 315 Hz e são caracterizados por apresentarem uma boa sensibilidade às vibrações para estes valores. Não têm a capacidade de identificar frequências abaixo de 1 Hz, não trazendo qualquer problema para o caso em estudo, uma vez que as frequências obtidas experimentalmente para pisos sujeitos a actividades humanas são superiores a este valor [4, 44].

#### 4.4.2 Procedimentos de ensaio

Com base no modelo de elementos finitos M1 foram identificados os pontos com maior amplitude para os principais modos de vibração, dado que são estes os pontos que conseguem caracterizar de forma mais correcta a estrutura em questão.

Visto que os modos que poderão ser excitados por actividades rítmicas são simétricos segundo o eixo de simetria horizontal, concluiu-se que era possível realizar a medição com diversos pontos em apenas metade da laje. Contudo, no local por inspecção visual, verificou-se que sobre a metade dessa laje, ou seja, onde seriam colocados os geofones, existia um pavimento com caixa-de-ar com cerca de 5 cm. Assim, de forma a medir efectivamente as frequências e os modos de vibração da laje com esse pavimento, seria necessário colocar sensores na parte inferior da mesma, o que neste caso não foi possível e pelo qual foi necessário rever a estratégia de medições tendo-se optado por cobrir com pontos apenas em 1/4 da laje.

Redefinindo os pontos de 1/4 da laje, verificou-se que era necessário colocar um ensaio sobre o pavimento com caixa-de-ar para ter uma completa definição da malha, mesmo tendo plena consciência que os resultados esperados poderiam não ser os expectáveis. Com esta opção, de se medir apenas 1/4 da laje, previa-se uma dificuldade adicional na identificação dos modos com base nos registos dos pontos medidos. Os pontos escolhidos têm como base todos os modos de vibração verticais, de forma a que os sensores colocados nesses mesmos pontos consigam identificar os modos provenientes do modelo numérico.

O procedimento do ensaio consiste em manter um geofone sempre num ponto de referência, neste caso, no ponto P3. Os restantes sensores são movidos sucessivamente noutras posições, de forma a serem medidos todos os pontos definidos na malha. Assim, com quatro geofones (G1, G2, G3 e G4) disponíveis para efectuar as medições e com 24 pontos na malha, foram realizados 9 conjuntos de ensaios para ter uma completa definição do piso em estudo. Na figura 4.13 estão definidas as posições dos geofones e na tabela 4.3 estão definidas as configurações dos mesmos.

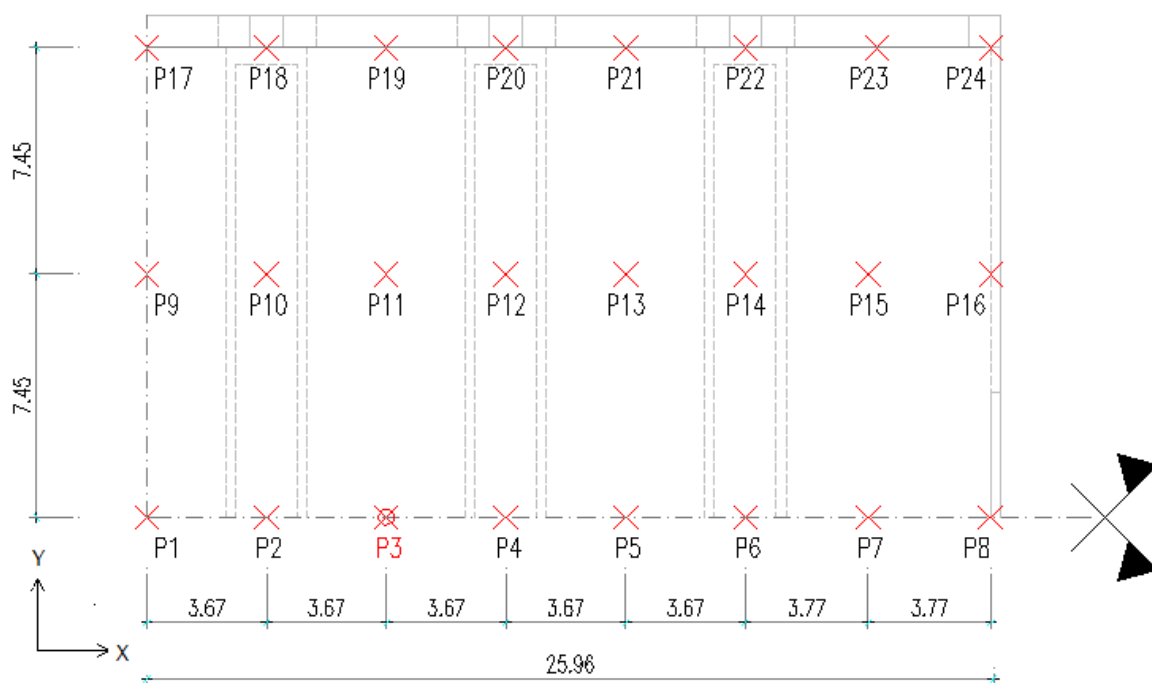


Figura 4.13: Pontos medidos para caracterização dinâmica do piso.

Tabela 4.3: Configuração dos geofones em cada ensaios efectuado.

Ensaio (Setups)	Pontos medidos	
	G2/G3/G4	G1 (Ref)
1	P13-P14-P15	P3
2	P10-P11-P12	P3
3	P2-P4	P3
4	P5-P6-P7	P3
5	P8-P16-P24	P3
6-7	P21-P22-P23	P3
8	P18-P19-P20	P3
9	P1-P9-P17	P3

Anteriormente à realização das medições, foi necessário definir dois parâmetros: o tempo de gravação e a frequência de amostragem. Para cada ensaio experimental definiu-se um tempo de gravação de 5 minutos e uma frequência amostragem de 100 Hz.

A frequência de amostragem é o dobro da frequência de Nyquist, sendo esta a frequência máxima detectada pelos sensores. No entanto, a frequência de amostragem apenas permite detectar valores de frequência até 40 Hz (diminuindo a frequência de Nyquist para 80%) de forma a minimizar os erros.

## 4.5 Análise e processamento de sinais

### 4.5.1 Ensaio do impacto do calcanhar

Para identificar a gama de frequências onde seria expectável serem encontrados modos de vibração, foram efectuados vários ensaios do impacto do calcanhar em diversos pontos da laje em estudo (1/2 e 1/4 de vão).

Na figura 4.14(a) são apresentadas três séries temporais e na figura 4.14(b) os respectivos espectros de resposta em frequências provenientes dos ensaios efectuados. É possível observar um pico de frequência bastante explícito que ronda os 6 Hz em todos os ensaios e outros picos de menor magnitude entre os 6 e 8 Hz, em alguns dos ensaios efectuados, sendo expectável identificar frequências dentro dessa gama de valores.

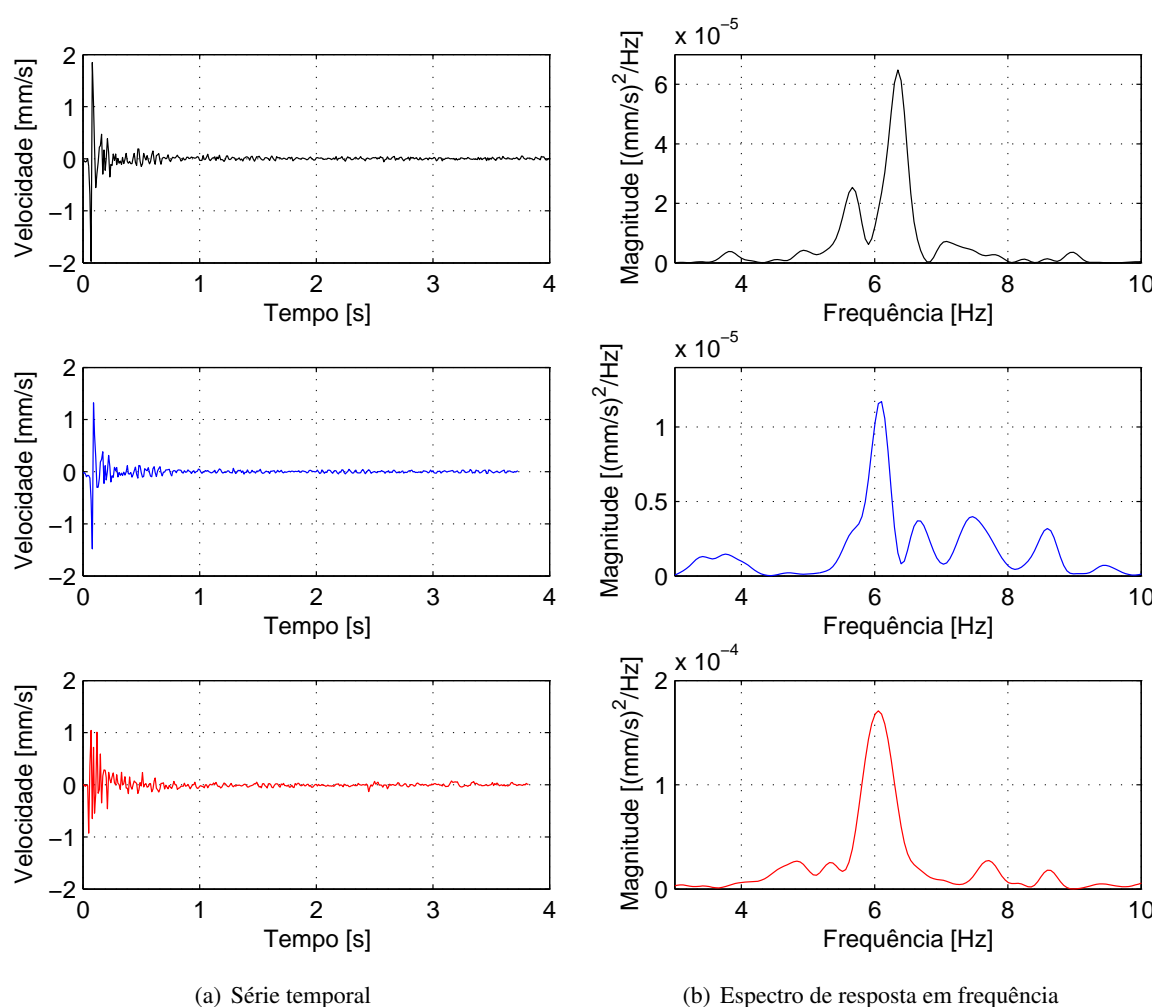


Figura 4.14: Ensaio do impacto do calcanhar - ("heel drop test").

### 4.5.2 Pré-processamento das séries temporais

Após observar os sinais obtidos em cada ensaio pelos quatro geofones utilizados, verificou-se que as medições efectuadas nos pontos P15 e P8, pelo geofones G4 e G3, respectivamente, não obtiveram



registos de medições devido a erros de gravação.

Inicialmente observou-se o comportamento das séries temporais retirados dos ensaios efectuados, de forma a verificar irregularidades dos sinais. O procedimento é exemplificado para o primeiro ensaio efectuado. Como na presente dissertação apenas se pretende estudar os modos verticais e não os modos globais da estrutura, optou-se por analisar unicamente os sinais que resultaram da direcção do eixo  $z$ . Na figura 4.15, apresenta-se as velocidades obtidas no primeiro ensaio, segundo a direcção do eixo  $z$ , no ponto de referência P3 (G1), no ponto P13 (G3) e no ponto P14 (G2).

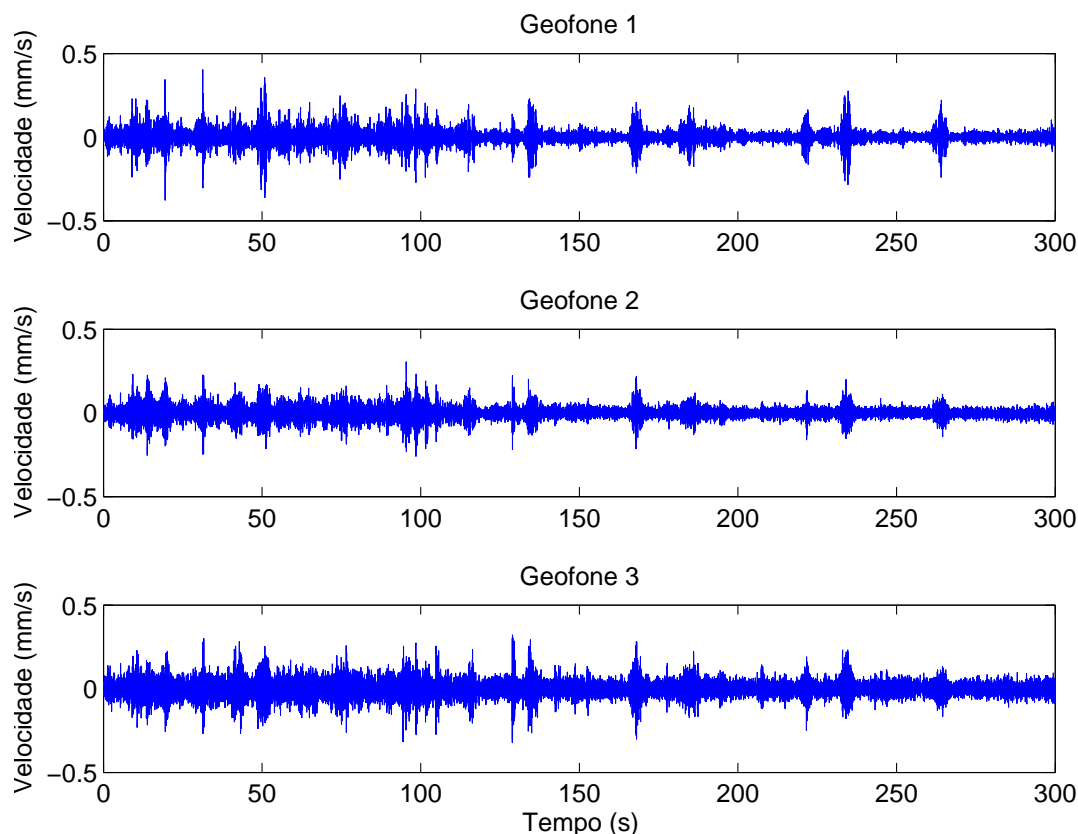


Figura 4.15: Gráficos das velocidades obtidas no ensaio 1, segundo a direcção  $z$ .

Foi necessário alinhar temporalmente os registos de cada ensaio, através do acerto da hora proveniente do sistema de GPS, de forma a não haver desfasamentos entre os resultados obtidos pelos geofones. Na tentativa de efectuar o alinhamento temporal entre os geofones, verificou-se que não era possível alinhar o G4 com os outros três geofones, devido a um erro técnico associado à má conexão do GPS. Por esta razão, os ensaios efectuados por este geofone foram desprezados.

Com recurso ao programa de cálculo numérico, *Matlab* [31], foi avaliada a qualidade de todos os ensaios efectuados no pavilhão multidesportivo. Inicialmente, os resultados obtidos por cada ensaio foram tratados, de modo a reduzir o ruído existente em cada sinal. Aplicando o algoritmo da *FFT* e a sua inversa *IFFT*, foi possível reduzir os sinais provenientes do ruído. Como exemplo, pode-se observar a figura 4.16, onde o gráfico a azul representa o que foi medido inicialmente pelos geofones e a verde o sinal com a redução do ruído.

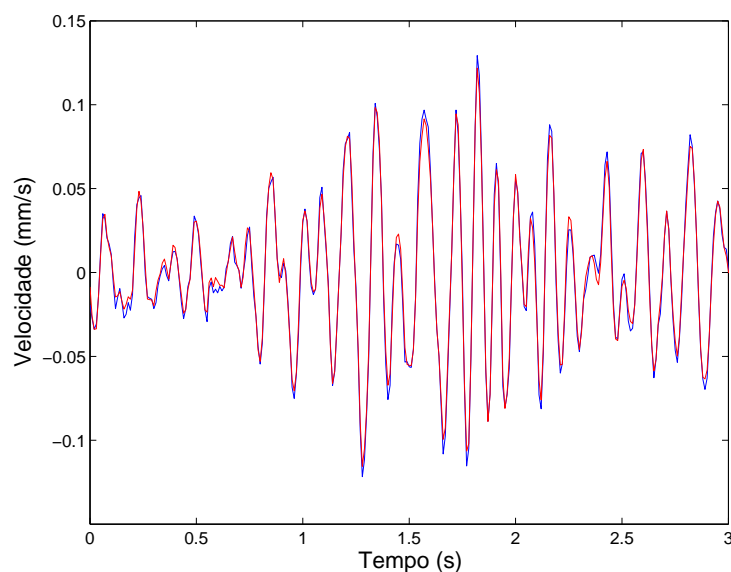


Figura 4.16: Gráficos de velocidades obtido pelo Geofone 1, já com a diminuição do ruído (verde).

Numa segunda fase, todos os sinais foram transformados para o domínio da frequência com uso da função *psd*, de forma a ser estimadas as funções de densidade espectral. Para isso foi necessário definir o número de linhas de frequência, que corresponde ao número de amostras na estimativa da função de correlação tendo-se optado por escolher 2048 linhas, uma vez que harmoniza os picos das funções de densidade espectral, sem tirar qualquer informação importante às mesmas. Obteve-se assim um espaçamento máximo entre duas frequências de 0.024 Hz. Para a sobreposição de segmentos de dados (overlap) utilizou-se a janela de Hanning associada a uma sobreposição de segmentos de 2/3.

Na figura 4.17 representa-se a estimativa das funções de densidade espectral dos registos medidos no primeiro ensaio. Da análise da figura verifica-se os mesmos picos em todos os ensaios, na gama de frequências entre 5 a 11 Hz, sendo expectável que se identifiquem as frequências do piso neste intervalo.

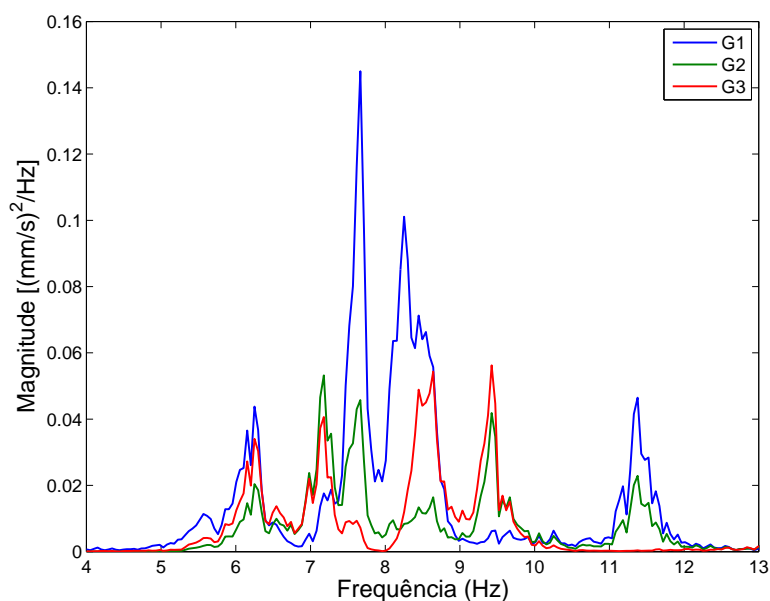


Figura 4.17: Estimativa das funções de densidade espectral (G1, G2 e G3) relativamente ao primeiro ensaio.

Para cada ensaio, no programa *Matlab*, foram analisadas as funções de coerência com recurso à função *csd*, de modo a avaliar a linearidade dos sinais. Na figura 4.18, observa-se a coerência entre os registos dos geofones, dois a dois: G1 e G2, G2 e G3, G1 e G3, do primeiro ensaio. Quando o valor da coerência é próximo de 1, significa que os geofones apresentam funções semelhantes de densidade espectral. Desta forma, verifica-se que para os valores de frequências entre 5 Hz e 11 Hz, os sinais têm uma boa coerência.

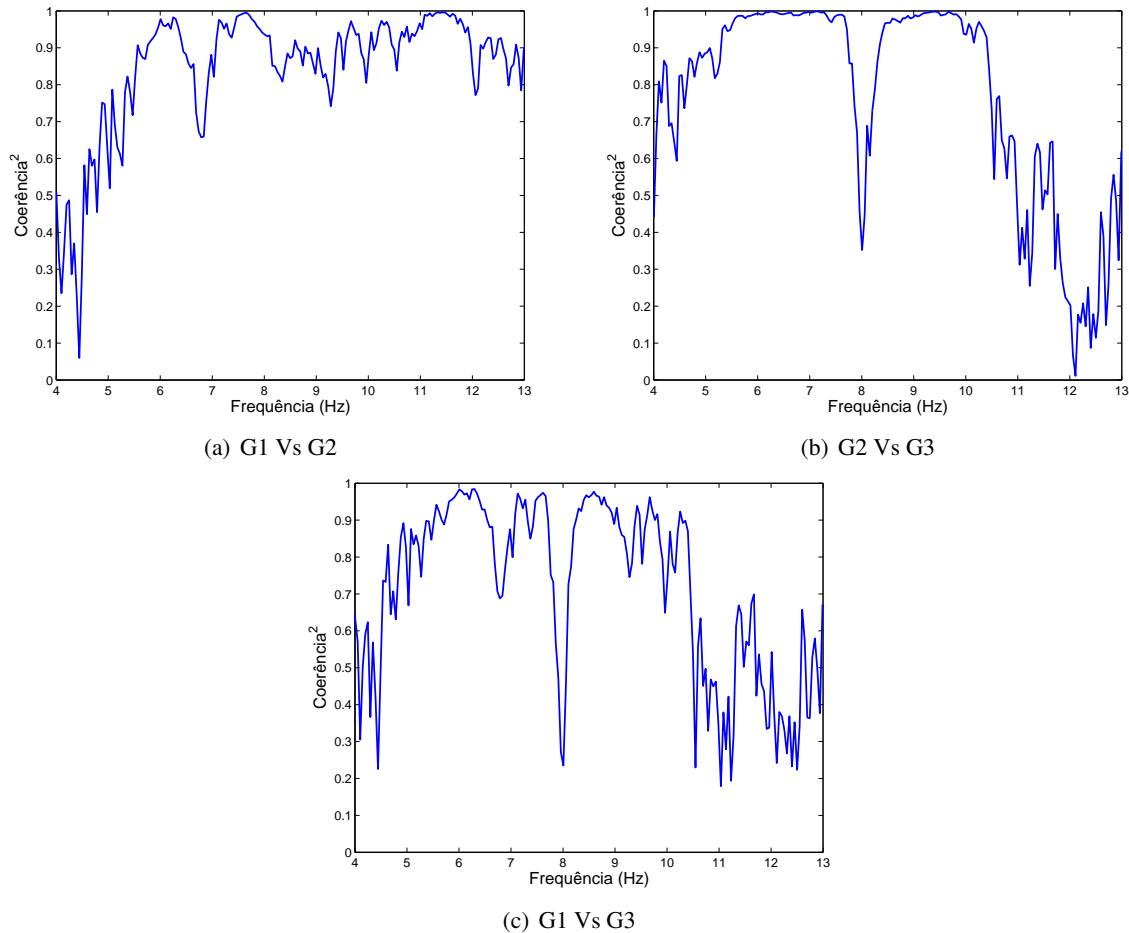


Figura 4.18: Coerência entre os sinais medidos a partir G1 e G2, G2 e G3 e G1 e G3, do primeiro ensaio.

A mesma análise foi aplicada a todos os ensaios. Do último ensaio (ensaio 9), foi possível verificar que as funções de densidade espectral provenientes dos G2 e G3 não eram as expectáveis quando comparadas com o geofone de referência e, por conseguinte, este último ensaio foi desprezado. Como referido anteriormente, este facto era expectável dado que estes sensores estavam colocados sobre a caixa-de-ar.

Após o pré-processamento dos sinais em *Matlab*, verificou-se que os sinais provenientes dos primeiros sete ensaios apresentavam uma boa coerência e, dessa forma procedeu-se ao processamento dos mesmos do programa *ARTEMIS*. Este programa é composto pelo *ARTEMIS Testor* e pelo *ARTEMIS Extractor*. No *ARTEMIS Testor* introduziram-se os registos dos sinais dos sete ensaios e a malha de pontos definida na figura 4.13. Neste mesmo programa, efectuou-se a ligação entre os dados obtidos pelos geofones com os pontos correspondentes medidos por cada geofone. Posteriormente, estes dados são exportados para o *ARTEMIS Extractor*, de forma a serem analisados e para posteriormente serem identificadas as características dinâmicas do piso.

Na figura 4.19, é apresentada uma média de valores singulares normalizados da matriz de funções de densidade espectral dos ensaios, que permitem ter uma expectativa das frequências. Como estes ensaios são do tipo "output-only", a análise dos resultados deverá ser bastante cuidada por forma a diferenciar correctamente os picos dos modos estruturais dos não estruturais (de ruído ou numéricos) [10, 45]. De uma forma sucinta, pode dizer-se que se está perante um modo estrutural quando para uma dada frequência é possível identificar um único pico na matriz da densidade espectral dos valores singulares. É possível identificar dois picos aguçados, por volta dos 15 Hz. Estes picos são referentes a frequências harmónicas que são identificadas e desprezadas como frequências da estrutura pelo programa *ARTeMIS*.

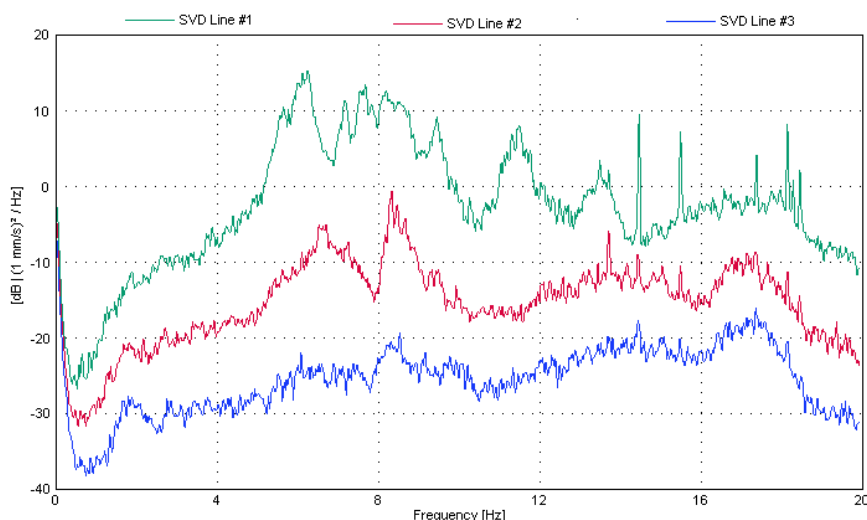


Figura 4.19: Média dos valores singulares normalizados da matriz de funções de densidade espectral a partir de todos os ensaios.

Efectuou-se ainda uma análise dos ensaios através de um diagrama de contorno tempo-frequência, também denominado de espectrograma das densidades espectrais. Este espectrograma é estimado segundo dois graus de liberdade, relativamente a um ensaio experimental.

A título de exemplo na figura 4.20 apresenta-se um espectrograma do primeiro ensaio que representa a variação do conteúdo de frequência do sinal ao longo do tempo. No espectrograma, a cor vermelha indica as regiões com mais conteúdo energético, o que significa que uma dada frequência está contida na resposta de forma contínua. Visto os espectrogramas apresentarem todos uma configuração idêntica, foi possível confirmar a qualidade dos sinais dos sete ensaios considerados para identificação modal.

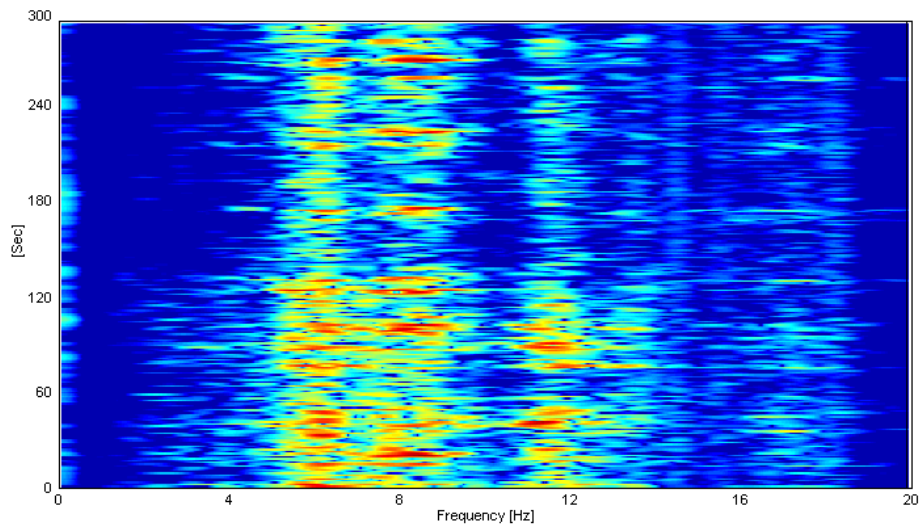


Figura 4.20: Espectrograma entre o G1 e G3, relativamente ao primeiro ensaio.

### 4.5.3 Identificação modal

Após o pré-processamento de todos os sinais e respectiva análise, procedeu-se à identificação modal no programa *ARTEMIS*. Através de vários métodos, no domínio da frequência (EFDD, FDD, CFDD) e no domínio do tempo (SSI-UPC, SSI-PC, SSI-CVA), estimam-se as propriedades dinâmicas, ou seja, as frequências próprias e os respectivos modos de vibração, e nalguns casos, o amortecimento modal.

A identificação dos parâmetros modais pelos métodos no domínio da frequência baseiam-se na selecção dos picos do espectro dos valores singulares (SVD) da matriz das funções de densidade espectral, sendo que optou-se o método EFDD para a identificação modal, conforme apresentado na figura 4.21. Importa referir que foi utilizado um filtro passa-banda, que permitiu identificar frequências entre a gama de 3 Hz e 20 Hz.

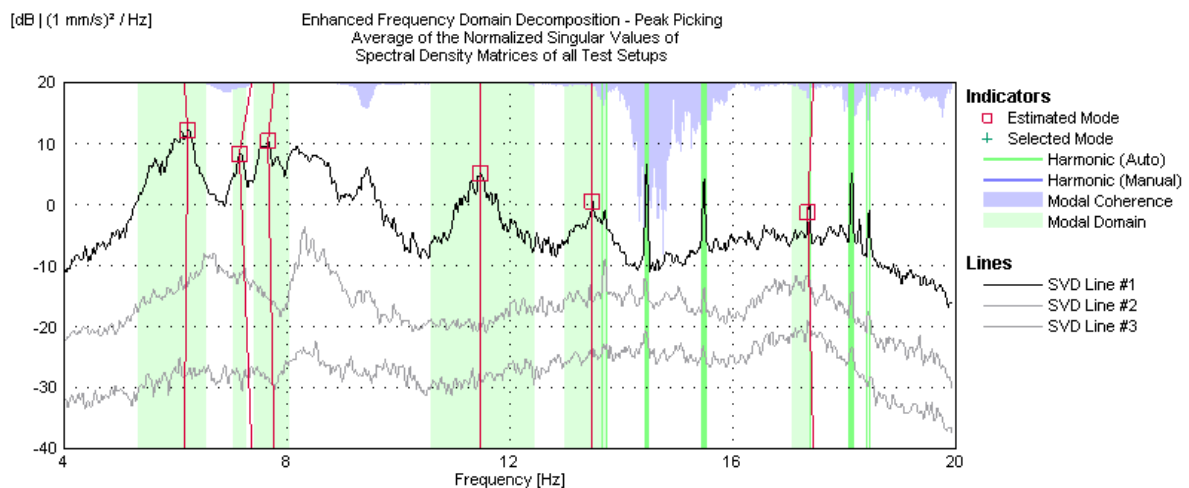


Figura 4.21: Espectros dos valores singulares da matriz de funções de densidade espectral, segundo o método EFDD.

Os resultados obtidos pelo método EFDD foram comparados com um método de identificação no domínio do tempo, neste caso, o SSI-UPC. Na figura 4.22 é apresentado o diagrama de estabilização utilizando o método de identificação SSI-UPC.

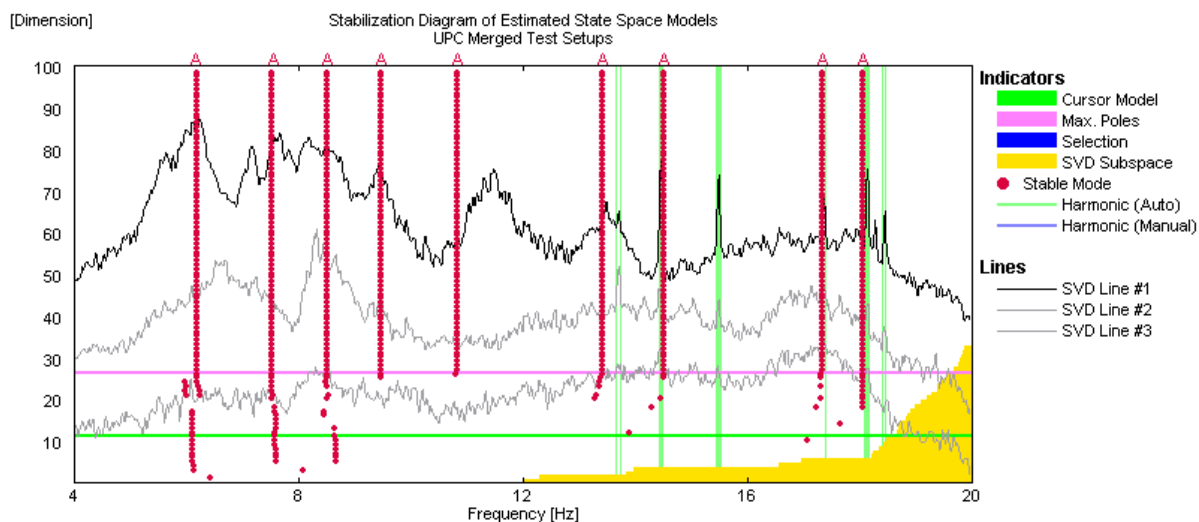


Figura 4.22: Diagrama de estabilização, utilizando como método de identificação o SSI-UPC.

Na tabela 4.4 apresentam-se as frequências mais significativas identificadas pelos dois métodos, EFDD e SSI-UPC e os respectivos coeficientes de amortecimento ( $\xi$ ).

Tabela 4.4: Propriedades dinâmicas resultantes da aplicação dos métodos EFDD e SSI-UPC.

EFDD		SSI-UPC	
$f$ [Hz]	$\xi$ [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [%]
6.17	3.43	6.20	3.19
7.78	2.11	7.54	3.22
13.41	4.18	13.47	1.42
17.43	1.11	17.31	2.22

Como forma de comparar as configurações modais obtidas pelos dois métodos e as respectivas frequências, utilizou-se a matriz MAC, vide secção 3.3.1, conforme apresentado na tabela 4.5.

Tabela 4.5: Comparação entre as técnicas EFDD e SSI-UPC, através da matriz MAC.

		SSI-UPC			
		6.20 Hz	7.54 Hz	13.47 Hz	17.31 Hz
EFDD	6.17 Hz	0.924	0.035	0.081	0.200
	7.78 Hz	0.004	0.863	0.214	0.2034
	13.41 Hz	0.181	0.009	0.723	0.40
	17.43 Hz	0.263	0.077	0.294	0.798

Na figura 4.23 estão representadas as configurações modais associadas aos dois primeiros modos de vibração identificados pelos dois métodos (EFDD e SSI-UPC).

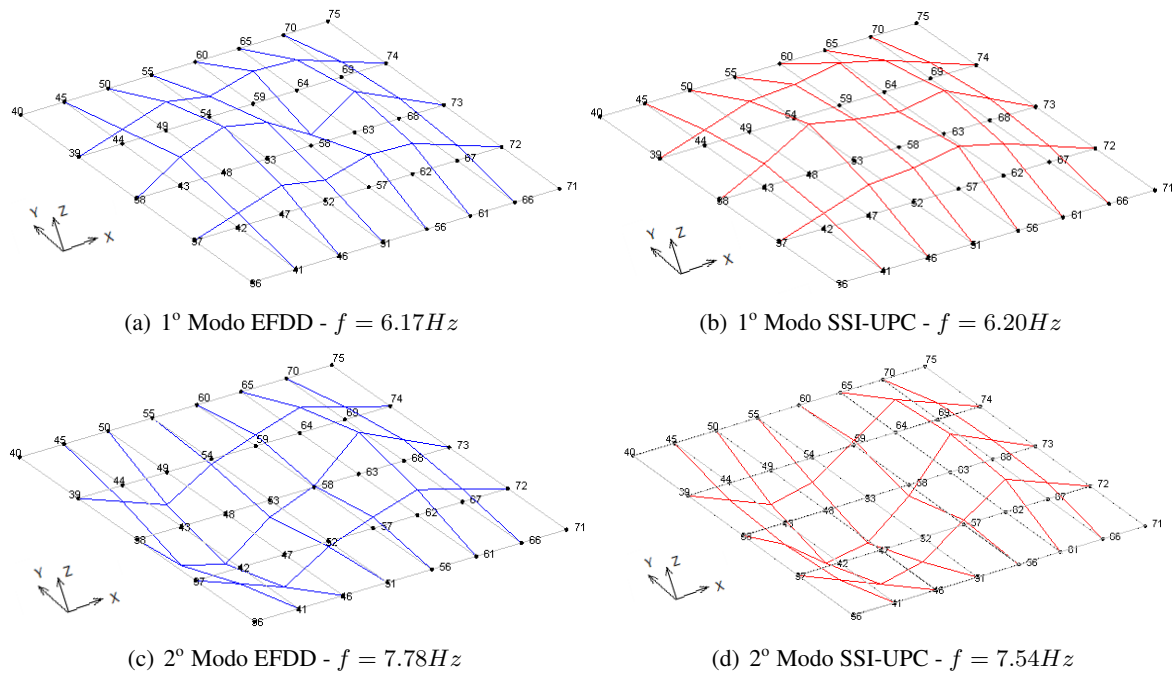


Figura 4.23: Modos de vibração identificados pelo método EFDD (cor azul) e pelo método SSI-UPC (cor vermelha).

É de referir que para os pontos associados aos geofones, que não obtiveram registos de medições por erro técnico, ou então, para os pontos que não foram considerados por má qualidade do sinal, foi necessário fazer um estudo para cada um deles, criando dependências através de pontos adjacentes. Para tal, recorreu-se ao comando *Slave Nodes Equations* do *ARTeMIS Extractor*, para que em cada ponto sem medições, se definissem relações entre os pontos adjacentes.

#### 4.5.4 Validação do modelo

A comparação entre os resultados obtidos numericamente e os resultados obtidos pela identificação modal estocástica do programa *ARTeMIS*, foi também realizada através da matriz MAC. Para tal, foi necessário retirar os valores dos deslocamentos relativamente aos pontos escolhidos do modelo M1, de modo a serem introduzidos no programa. Este procedimento foi efectuado através de um ficheiro .uff, retirado do *ARTeMIS*, onde foi possível atribuir a cada ponto, o respectivo deslocamento resultante do modelo M1. O método utilizado para comparar os resultados com o modelo M1 foi o SSI-UPC.

Comparando as configurações modais, através da matriz MAC, do segundo modo do modelo M1 com o primeiro modo identificado pelo SSI-UPC foi possível verificar uma correlação cerca de 53%. Observa-se também que a frequência correspondente ao modo de vibração do modelo M1 ( $f_2=4,96$  Hz) é inferior quando comparada com a frequência obtida pelos resultados experimentais ( $f_1=6,20$  Hz), sendo o erro relativo de 20%.

Como era expectável, existe uma discrepância entre os parâmetros modais obtidos através da modelação no *SAP2000* e os parâmetros resultantes do conjunto de ensaios in-situ, pelo que foi necessário realizar

uma revisão do modelo de elementos finitos, com o intuito de se obter uma boa correlação entre os parâmetros obtidos, como descrito na secção seguinte.

## 4.6 Melhoramento do modelo de elementos finitos M1

A elaboração do modelo M1 teve como objectivo a estimativa das frequências e dos modos de vibração bem como a localização dos pontos para posteriores medições, verificando-se uma discrepância entre os resultados obtidos experimentalmente com os obtidos numericamente. Procedeu-se então à actualização do modelo, seguindo duas abordagens distintas:

- revisão e aperfeiçoamento do modelo, em que é efectuada uma revisão das opções da modelação dos elementos estruturais e das respectivas ligações;
- ajuste dos parâmetros, onde os parâmetros que definem o modelo são sujeitos a um estudo de sensibilidade e onde são actualizados com novos valores tendo em conta os limites razoáveis, para que os resultados do modelo analítico se aproximem o mais possível dos resultados obtidos experimentalmente.

Primeiramente procedeu-se à revisão do modelo M1 e só após todas as alterações efectuadas no mesmo, realizou-se um estudo de sensibilidade dos parâmetros.

### 4.6.1 Revisão e aperfeiçoamento do modelo

Para a revisão das opções de modelação tomadas durante a realização do modelo M1, quanto ao tipo de elementos utilizados nas paredes resistentes, comparou-se a opção do uso de elementos *Membrana* com a utilização de elementos *Barra* [42]. Após a comparação, observou-se que para análises lineares, estas duas formas de se modelar as paredes resistentes apresentam configurações modais bastante similares e valores de frequências bastante próximos pelo que se manteve o modelo inicial com elementos *Barra*.

Para verificar o comportamento da laje recorreu-se à análise dos diagramas de esforços provenientes do modelo M1, mais propriamente aos diagramas de momentos flectores, apresentada na figura 4.24. Após a sua análise, verificou-se que a modelação feita não estaria correcta, uma vez que os maiores momentos negativos da laje, verificam-se sobre o eixo do centróide da viga, figura 4.25(a) modelada com elementos *Barra*, figura 4.25(b). Optou-se por alterar a modelação das vigas em caixão para elementos tipo *Membrana*, figura 4.26(b), esperando que os maiores valores de momentos negativos se situassem sobre as almas da viga em caixão, figura 4.26(a). Com esta opção, obtiveram-se os diagramas da figura 4.27, na qual se observa que a laje comporta-se como seria expectável, isto é, a laje funciona entre as almas das vigas em caixão adjacentes, com um vão de 4.8 m sendo que este ainda intercala com vãos livres com 1.9 m (distância entre as almas da viga). Apesar desta opção não modificar significativamente as frequências mais baixas, da tabela 4.6, alterou as configurações modais, pelo que se adoptou a modelação das vigas em caixão com elementos de *Membrana*. É importante referir que nestes elementos de *Membrana* foi contabilizada também a armadura ordinária existente bem como a armadura referente aos cabos de pré-esforço.



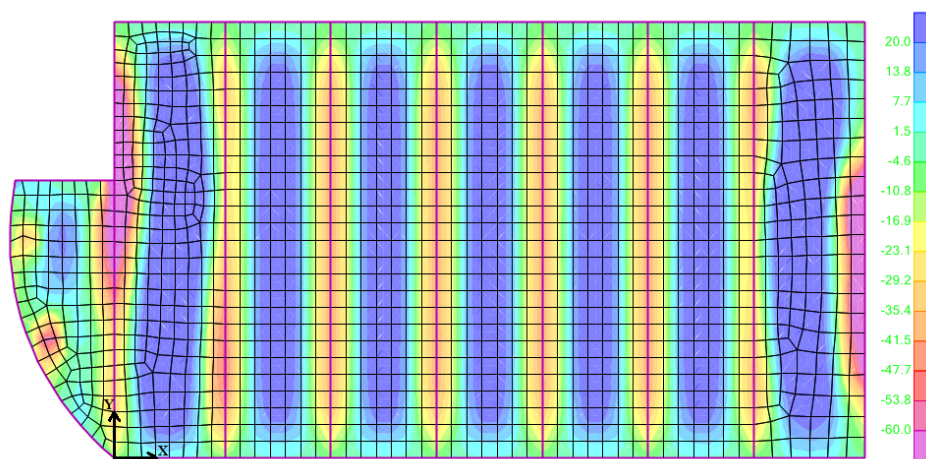


Figura 4.24: Diagrama de momentos flectores da laje do modelo prévio, segundo a direcção x.

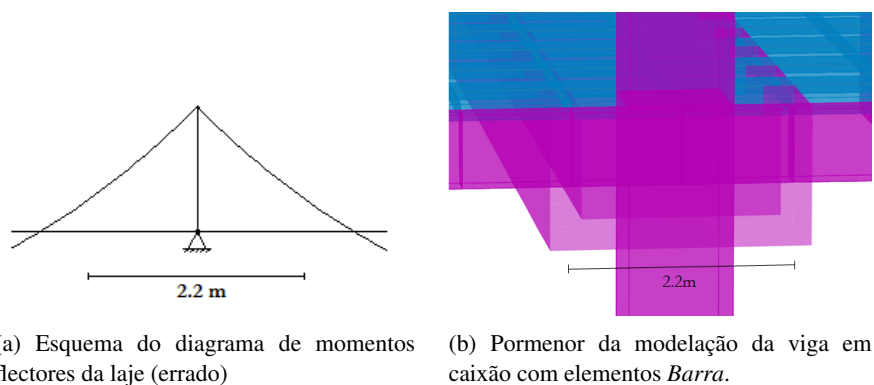


Figura 4.25: Pormenores da modelação da viga em caixão com elementos do tipo *Barra*.

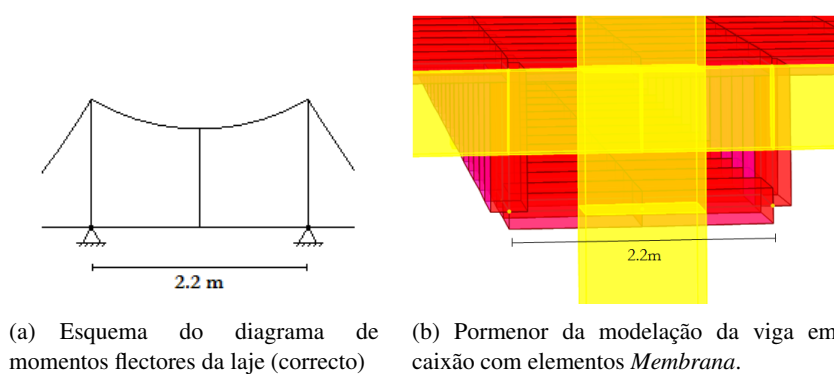


Figura 4.26: Pormenores da modelação da viga em caixão com elementos do tipo *Membrana*.

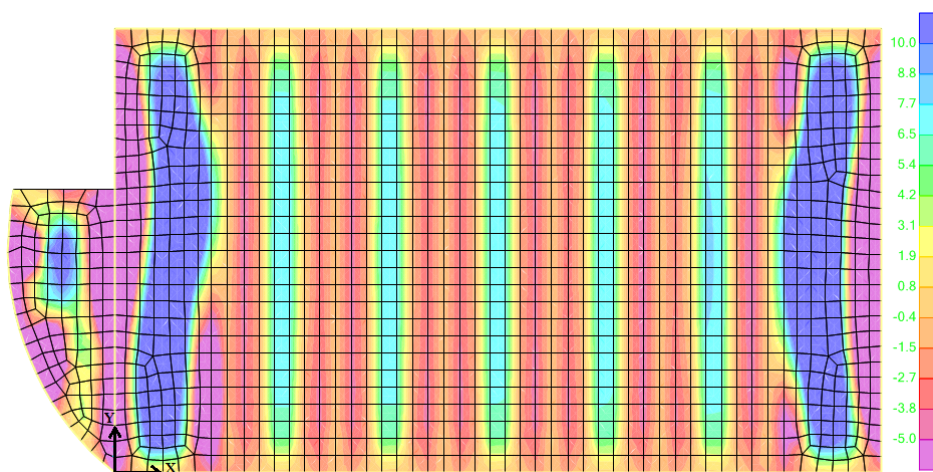


Figura 4.27: Diagrama de momentos flectores da laje do novo modelo, segundo a direcção x.

Após a alteração da modelação das vigas em caixão para elementos tipo *Membrana*, foi necessário proceder à actualização da ligação viga-pilar. Neste sentido, foram adicionados *constraints-body* nas extremidades das vigas. Esta opção produz um aumento significativo na rigidez da laje, que se traduz no aumento dos valores de frequências.

Devido à existência de uma laje adjacente à laje em estudo, como mostra a figura 4.4 foi efectuada uma análise da influência desta ligação. Assim, foram adicionadas molas, de forma a contabilizar a contribuição da rigidez dessa laje adjacente. Foi então, efectuada uma estimativa dessa rigidez inicial de 20000 kNm/rad e, posteriormente, procedeu-se a um estudo de sensibilidade da mola, de modo a verificar a sua influência na estrutura em estudo.

Na tabela 4.6 são apresentadas as influências dessas alterações nas frequências a partir do modelo M1, resultando, assim o modelo M2, ilustrado na figura 4.28.

Tabela 4.6: Resumo das frequências resultantes das alterações efectuadas a partir do modelo M1.

Frequências (Hz)						
Modelo M1		Modelação das paredes		Modelação das vigas		Modelo com adição da mola (M2)
		Barra para Membrana	Barra + Constraints	Barra para Membrana	Barra para Membrana + Constraints	
f1	4.84	4.84	4.85	4.90	5.54	5.55
f2	4.96	4.96	4.98	5.13	5.74	5.75
f3	5.17	5.20	5.22	5.54	6.13	6.14
f4	5.46	5.49	5.54	6.07	6.66	6.67
f5	5.83	5.87	5.96	6.69	7.29	7.19
f6	6.32	6.37	6.55	7.26	7.88	7.88

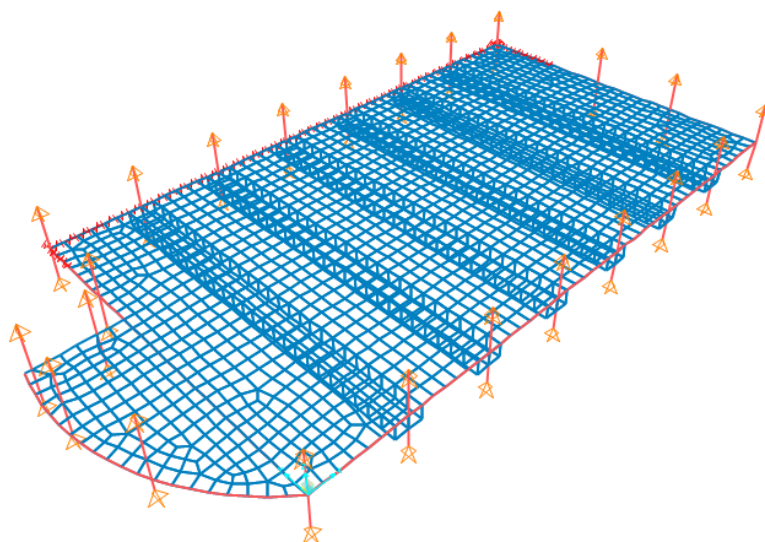


Figura 4.28: Modelo final M2 após revisão e melhoramento do modelo M1.

Nas figuras 4.29 e 4.30 apresentam-se os modos de vibração do modelo M2 com as respectivas frequências, após a revisão e o aperfeiçoamento do modelo M1.

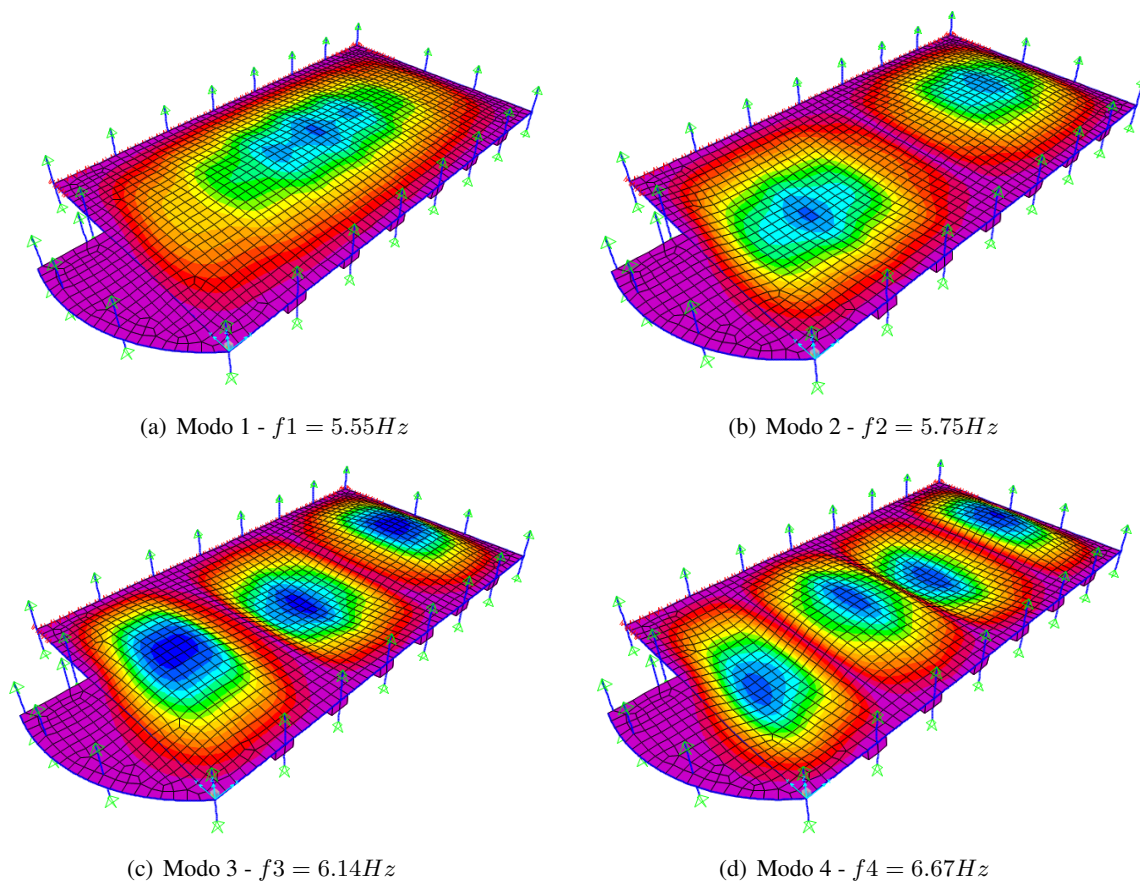


Figura 4.29: Modos de vibração (1, 2, 3 e 4) com as respectivas frequências referentes ao modelo M2.

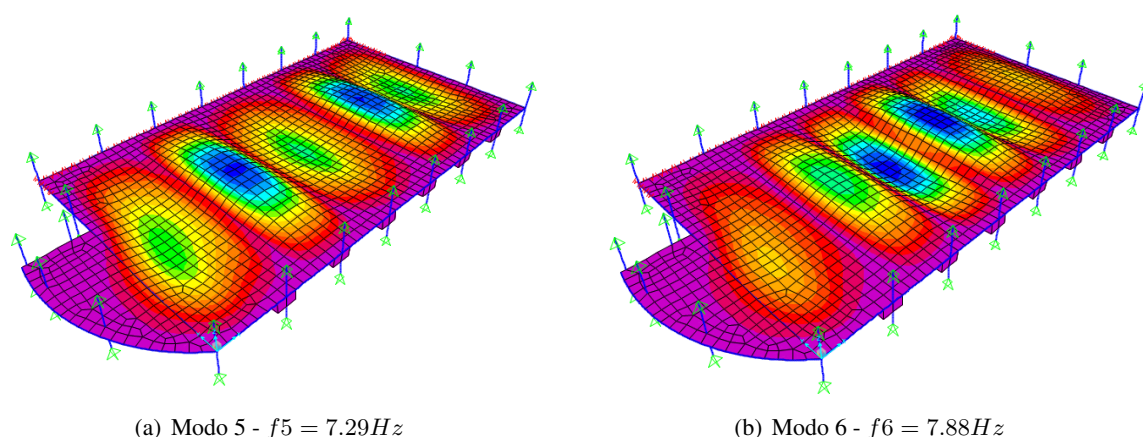


Figura 4.30: Modos de vibração (5 e 6) com as respectivas frequências referentes ao modelo M2.

#### 4.6.2 Ajuste dos parâmetros

Quando se modela uma estrutura exige-se a definição de diversos parâmetros que são variáveis, como é o caso do módulo de elasticidade e o peso volúmico. Dada a existência de incerteza relativamente a estes parâmetros e sempre que exista informação relativa a ensaios experimentais, é aconselhável o estudo da sensibilidade quanto à variação destes parâmetros. Para então perceber a influência desses parâmetros no comportamento dinâmico, procedeu-se a um estudo de sensibilidade do modelo M2. Assim, foram escolhidos os seguintes parâmetros: o módulo de elasticidade e o peso volúmico dos elementos verticais, das vigas em caixão e dos restantes elementos estruturais, bem como o estudo da rigidez da mola referente à contribuição da laje adjacente.

Importa referir que os estudos de sensibilidade foram efectuados no modelo M2, sendo tomado como valores de referência, os valores da tabela 4.2. Deste modo, o peso volúmico definido foi de  $24 \text{ kN/m}^3$  e o módulo de elasticidade foi de 35 GPa para as vigas em caixão e 33 GPa para os restantes elementos.

##### Módulo de elasticidade - Elementos verticais

Admitiu-se uma variação do módulo de elasticidade de -20% e 30% em relação ao valor de referência para o estudo de sensibilidade e foram registados os valores de frequências em intervalos de 5% como representado na figura 4.31.

Pode verificar-se pela figura 4.31, que para o mesmo peso volúmico, uma diminuição do módulo de elasticidade, produz uma diminuição da rigidez dos elementos verticais, o que implica uma diminuição das frequências em todos os modos de vibração. Do mesmo modo, um aumento do módulo de elasticidade provoca um aumento gradual das frequências de todos os modos. É possível verificar também pela mesma figura, que com o aumento do módulo de elasticidade, a diferença entre os valores de frequências obtidos através do modelo de elementos finitos diminuem, prevendo a estabilização para valores acima de 30%. Importa referir que as linhas de tendência dos modos de vibração apresentados são similares, sendo assim apresentada apenas a linha de tendência do primeiro modo.

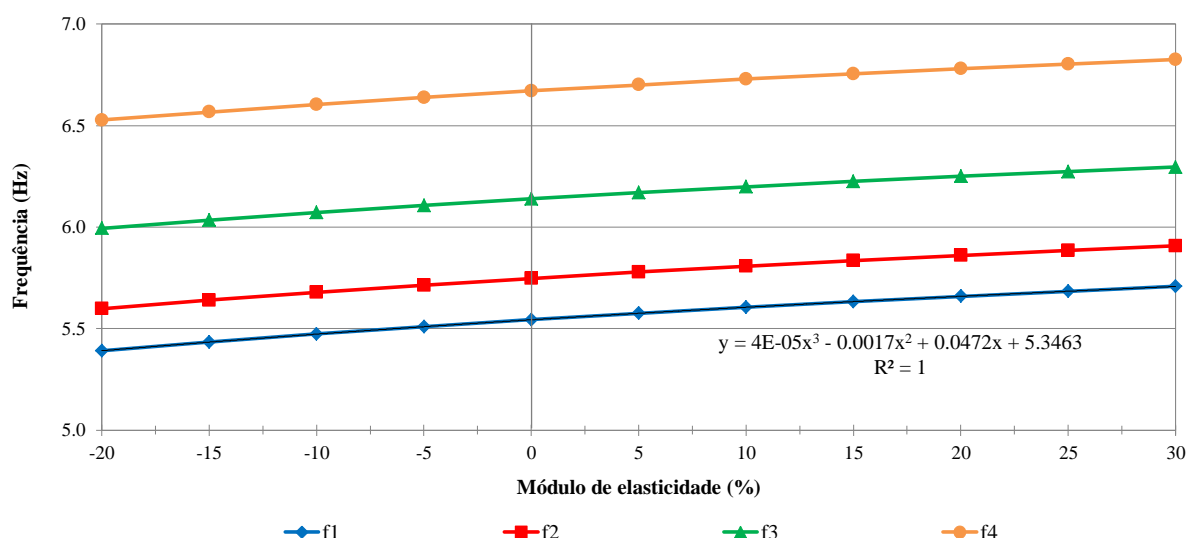


Figura 4.31: Estudo de sensibilidade da influência do módulo de elasticidade nos elementos verticais.

#### Módulo de elasticidade - Elementos horizontais

A variação do módulo de elasticidade do betão manteve-se igual para os elementos horizontais. Os resultados obtidos no estudo de sensibilidade das vigas em caixão e dos restantes elementos horizontais encontram-se nas figuras 4.32 e 4.33, respectivamente.

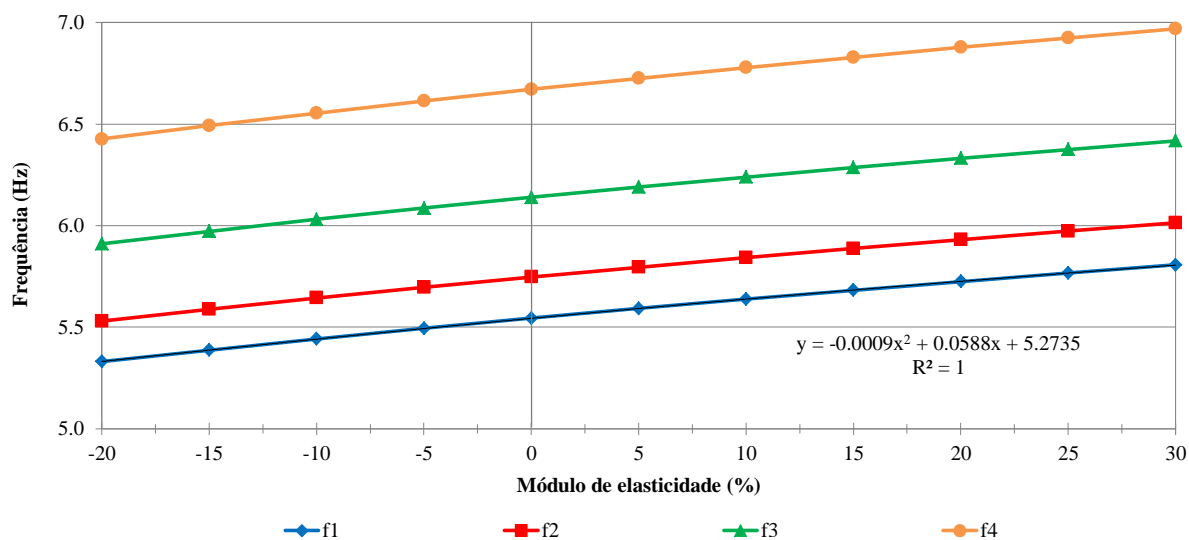


Figura 4.32: Estudo de sensibilidade da influência do módulo de elasticidade nas vigas em caixão.

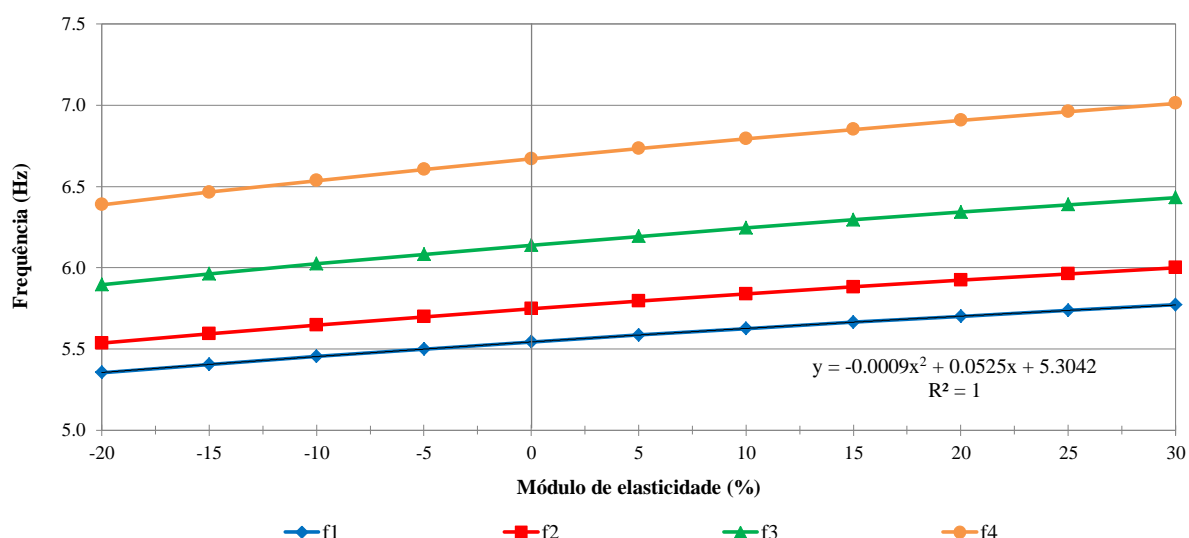


Figura 4.33: Estudo de sensibilidade da influência do módulo de elasticidade nos restantes elementos estruturais.

Verifica-se através das figuras 4.32 e 4.33, uma diminuição da rigidez, tanto nas vigas em caixão como nos restantes elementos, com a diminuição do módulo de elasticidade, conduzindo a uma diminuição dos valores de frequências. Observa-se através das equações das linhas de tendências das figuras 4.32 e 4.33 que a variação do módulo de elasticidade destes elementos é semelhante.

### Peso volúmico - Elementos verticais

Para o estudo de sensibilidade do peso volúmico admitiu-se uma variação de -6% a 6%, onde são registados os valores de frequências em intervalos de 2%. Na figura 4.34 apresenta-se o estudo de sensibilidade dos elementos verticais face à variação do peso volúmico.

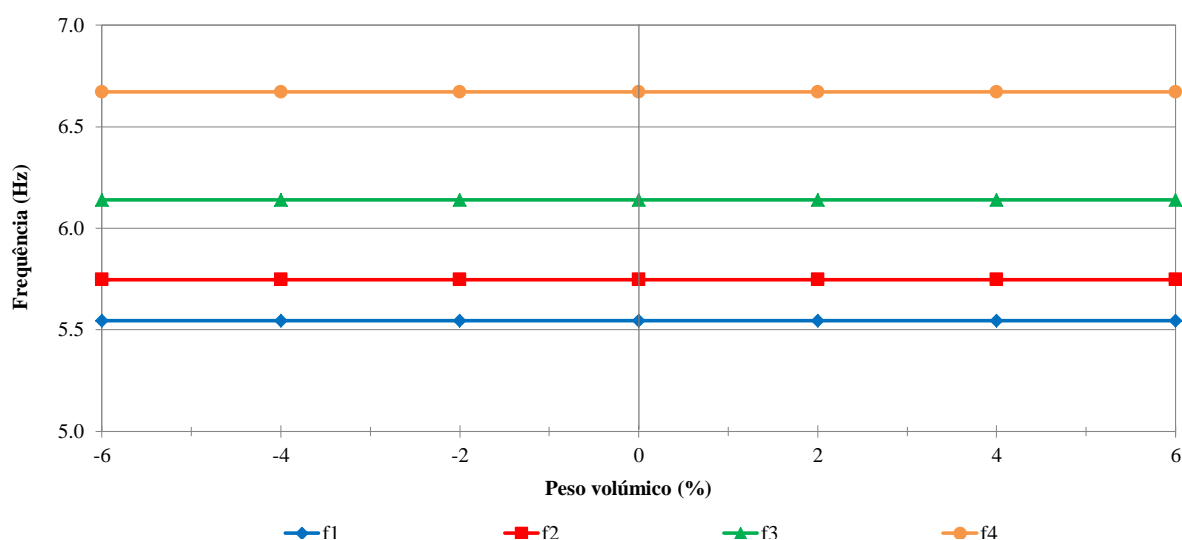


Figura 4.34: Estudo de sensibilidade da influência do peso volúmico nos elementos verticais.

Através da análise da figura 4.34, verifica-se que variando o peso volúmico as frequências permanecem



constantes, isto deve-se ao facto da variação do peso volúmico dos pilares e das paredes resistentes em nada contribuir para a alteração dos valores de frequências da laje bem como para os modos verticais da estrutura.

### Peso volúmico - Elementos horizontais

Nas figuras 4.35 e 4.36 estão representados o estudo de sensibilidade das vigas em caixão e dos restantes elementos horizontais fazendo variar o peso volúmico, de forma idêntica aos elementos verticais.

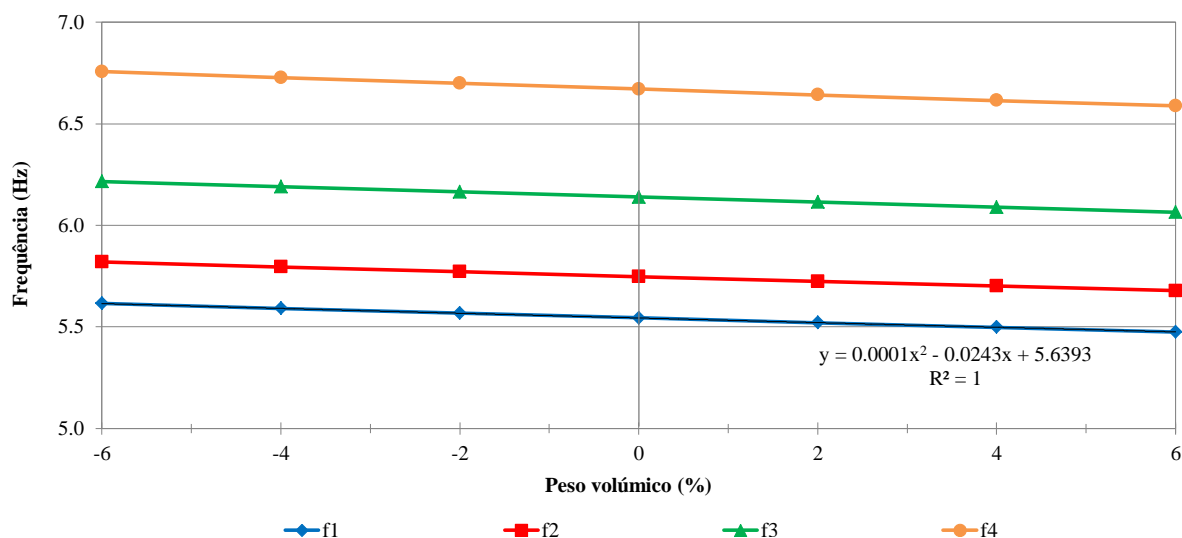


Figura 4.35: Estudo de sensibilidade da influência do peso volúmico nas vigas em caixão.

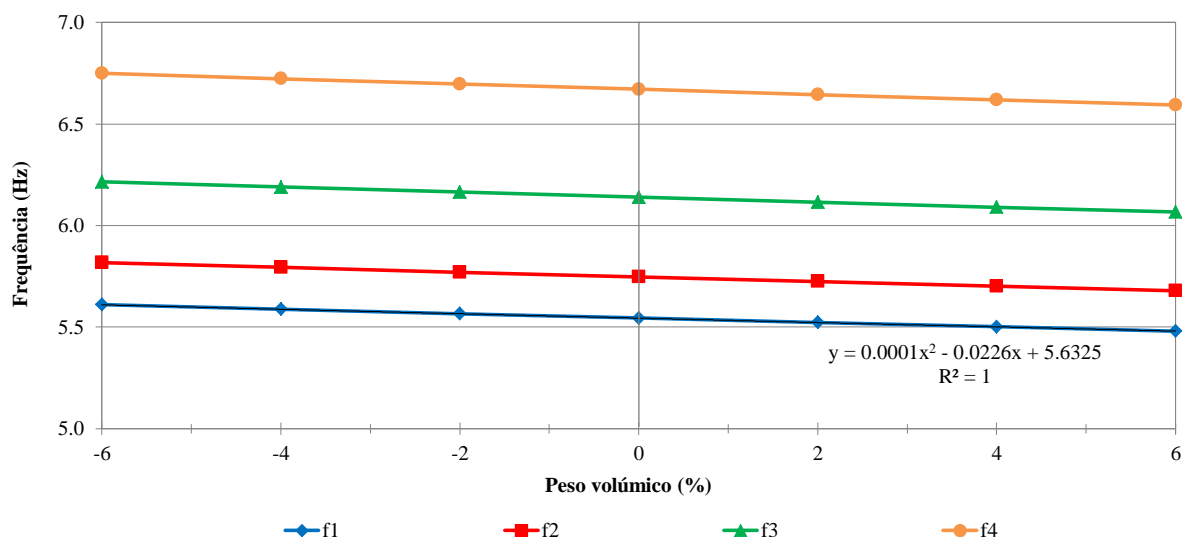


Figura 4.36: Estudo de sensibilidade da influência do peso volúmico nos restantes elementos estruturais.

Através das figuras 4.35 e 4.36 é possível constatar que para valores de peso volúmico inferiores ao valor de referência, as frequências tendem a aumentar. No entanto, com o aumento do peso volúmico, as

frequências tendem a diminuir em todos os modos. Verifica-se também para a mesma rigidez a variação do peso volúmico é similar tanto nas vigas em caixão como nos restantes elementos, traduzindo-se numa semelhança das linhas de tendências.

### Rigidez da mola referente à laje adjacente

Na figura 4.37 apresenta-se o estudo de sensibilidade da mola referente à influência da laje adjacente.

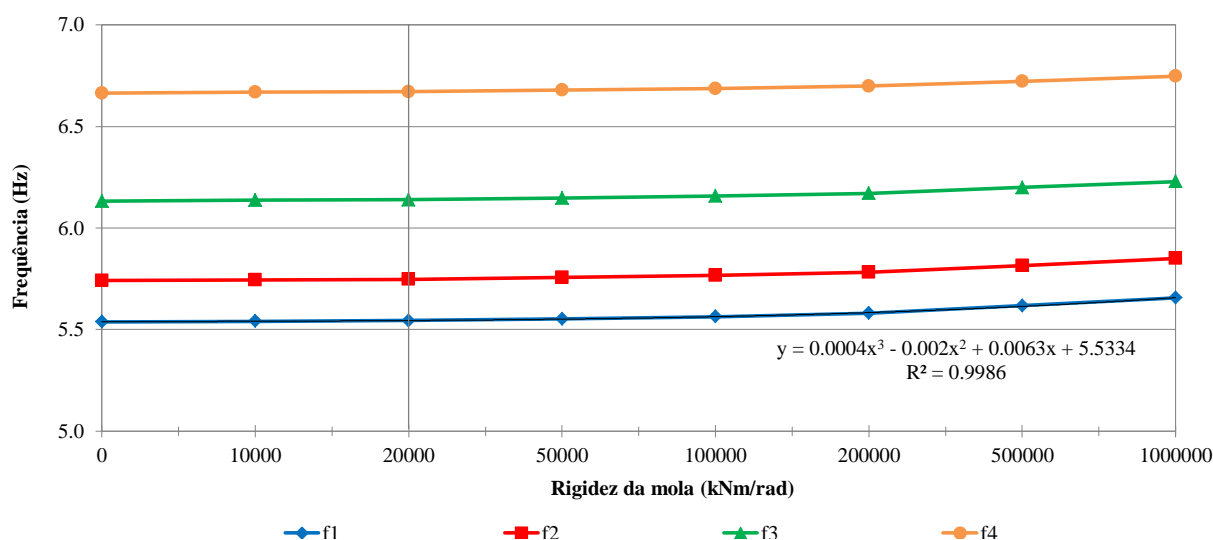


Figura 4.37: Estudo de sensibilidade da mola referente à influência da laje adjacente.

Com a análise da figura 4.37, verifica-se que um aumento da rigidez da mola provoca um aumento dos valores de frequência em todos os modos de vibração. Isto deve-se ao facto, que à medida que nos aproximamos da rigidez infinita da mola, os valores de frequência tendem a aumentar, substancialmente uma vez que se restringe por completo a rotação da laje segundo uma direcção.

## 4.7 Actualização do modelo de elementos finitos M2

Após os vários estudos de sensibilidade efectuados no modelo M2 foram realizadas várias tentativas de combinações manualmente, de forma a verificar qual a combinação que melhor aproxima os valores de frequências dos valores experimentais. Importa referir que todos os valores escolhidos para as diferentes combinações efectuadas estão dentro dos valores limite recomendados que se encontram documentados [40]. Na tabela 4.7 são identificados os parâmetros adoptados para a combinação que apresentou resultados de frequências mais próximos dos experimentais.



Tabela 4.7: Opções dos parâmetros adoptados após o estudo de sensibilidade no modelo M2.

Parâmetros	Valores dos parâmetros iniciais	Valores dos parâmetros actualizados	Variação (%)
$E_{EV}$	33 GPa	36.3 GPa	10
$E_{VC}$	35 GPa	42 GPa	20
$E_{RE}$	33 GPa	37.9 GPa	15
$\rho_{EV}$	24 kN/m <sup>3</sup>	24 kN/m <sup>3</sup>	0
$\rho_{VC}$	24 kN/m <sup>3</sup>	23.52 kN/m <sup>3</sup>	-2
$\rho_{RE}$	24 kN/m <sup>3</sup>	23.52 kN/m <sup>3</sup>	-2
$k_{mola}$	20000 kNm/rad	20000 kNm/rad	0

 $E_{EV}$  - Módulo de elasticidade dos elementos verticais $\rho_{EV}$  - Peso volúmico dos elementos verticais $E_{VC}$  - Módulo de elasticidade das vigas em caixão $\rho_{VC}$  - Peso volúmico das vigas em caixão $E_{RE}$  - Módulo de elasticidade dos restantes elementos $\rho_{RE}$  - Peso volúmico dos restantes elementos $k_{mola}$  - Rigidez da mola referente à laje adjacente

Na tabela 4.8 são apresentadas as frequências relativas ao modelo M2 (da tabela 4.6) e as frequências obtidas do modelo após o ajuste de parâmetros, sendo este designado de modelo M3.

Tabela 4.8: Frequências finais após ajuste dos parâmetros no modelo M3.

	Frequências após revisão (M2) (Hz)	Frequências após ajuste dos parâmetros (M3) (Hz)
f1	5.55	5.93
f2	5.74	6.16
f3	6.14	6.58
f4	6.67	7.16
f5	7.29	7.83
f6	7.88	8.47

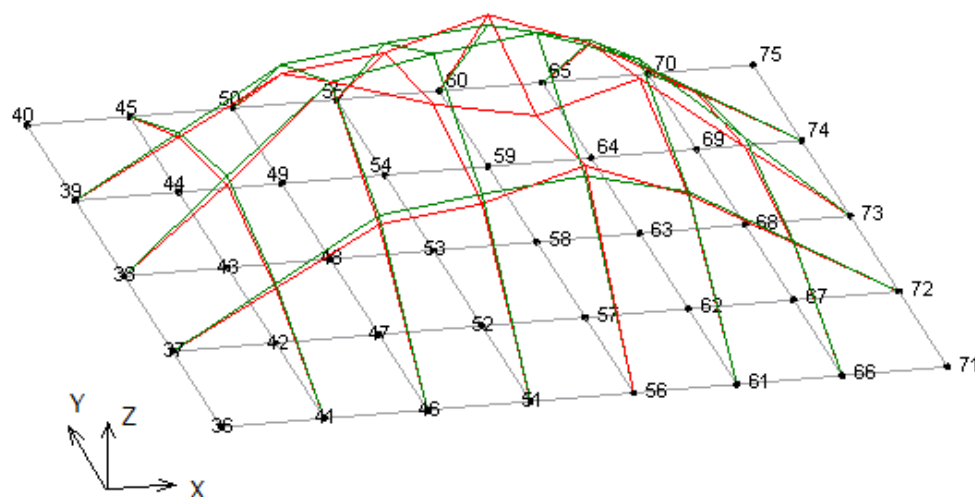
É de salientar que as configurações relativas ao modelo M3 permaneceram inalteráveis em relação ao modelo M2.

## 4.8 Validação do modelo de elementos finitos M3

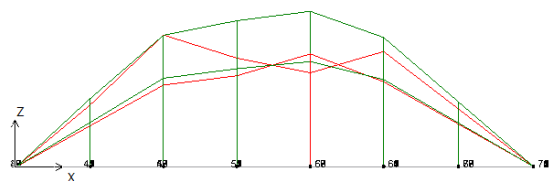
A actualização do modelo de elementos finitos efectuada na secção anterior permitiu ajustar os valores de frequência para valores que melhor se aproximam dos experimentais. No entanto, só a comparação entre as frequências obtidas pelo modelo numérico e as obtidas experimentalmente pode não ser suficiente para tirar conclusões acerca do modelo. Neste contexto, é conveniente analisar também as respectivas configurações modais.

Para a comparação dos resultados obtidos pelo modelo M3 introduziram-se, de novo, para cada modo de vibração os deslocamentos de cada um dos pontos instrumentados no programa *ARTEMIS*. Analisando os resultados foi possível verificar um aumento da correlação das configuração modais e uma diminuição

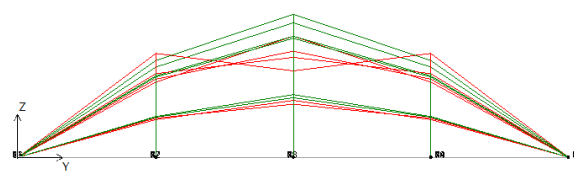
do erro relativo entre as frequências, relativamente à comparação efectuada na secção 4.5.4. Na figura 4.38 estão representadas as configurações modais associadas ao segundo modo de vibração do modelo M3 e ao primeiro modo de vibração identificado pelo SSI-UPC.



(a) Configuração modal - 3D



(b) Configuração modal - Plano XZ



(c) Configuração modal - Plano YZ

Figura 4.38: Configuração modal do método SSI-UPC (cor vermelha) e do modelo numérico do SAP2000 (cor verde).

Na tabela 4.9 estão identificadas as frequências de ambos os métodos com o erro relativo e a respectiva correlação entre as configurações modais.

Tabela 4.9: Erro relativo entre as frequências obtidas e respectivo coeficiente MAC.

Frequência (Hz)		$\Delta f$ (%)	MAC
SSI-UPC	SAP2000		
6.20	6.16	0.65	0.74

Como é possível verificar, através do coeficiente MAC, com as alterações efectuadas a partir do modelo M1 conseguiu-se reduzir o erro relativo entre as frequências e aumentar em 20% o valor do coeficiente MAC.

#### 4.8. VALIDAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS M3

Identificou-se também, através dos resultados obtidos pelo método de identificação FDD no programa *ARTEMIS*, um possível modo de vibração correspondente ao quarto modo de vibração do modelo M3 encontrado pelo *SAP2000*, figura 4.39.

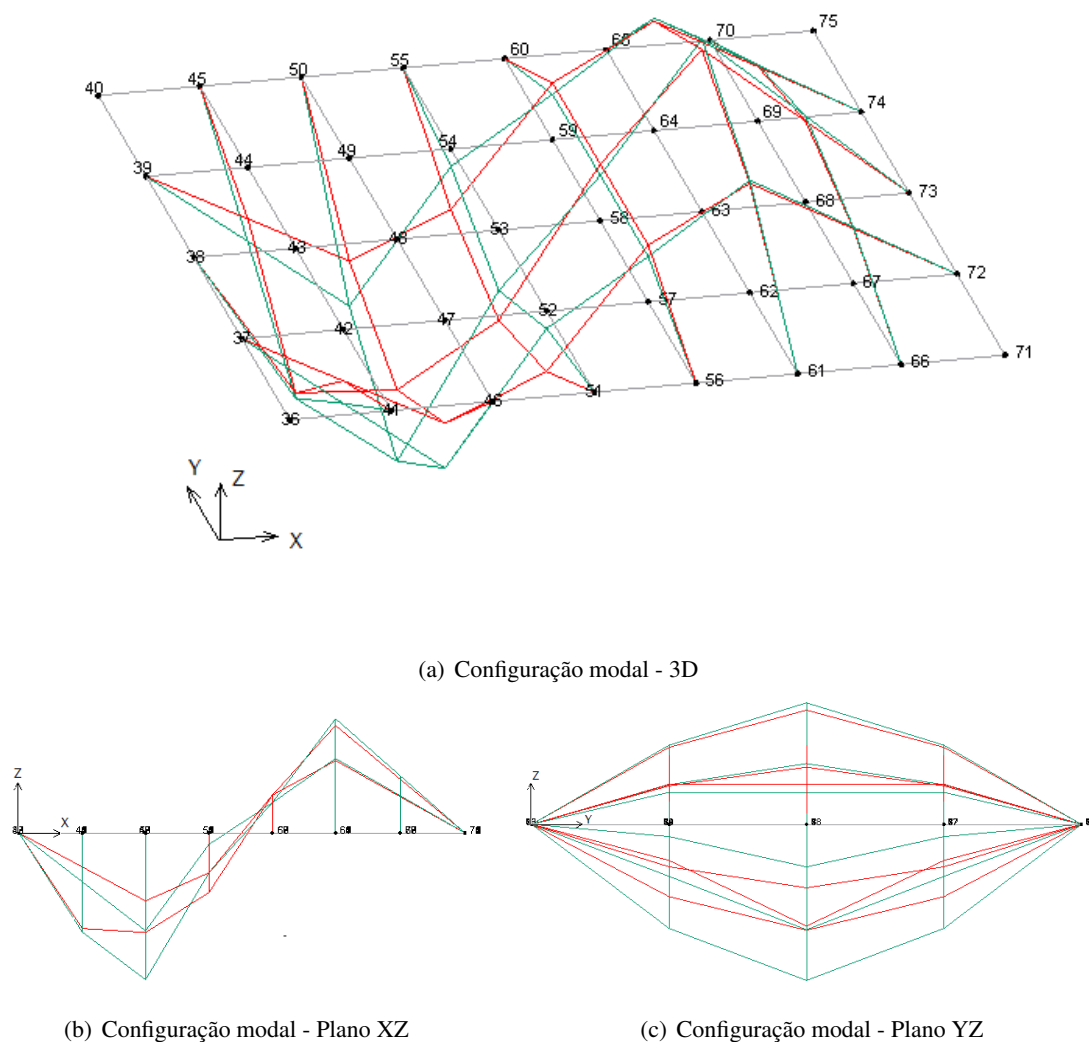


Figura 4.39: Configuração modal do método FDD (cor verde) e do modelo numérico do SAP2000 (cor vermelha).

Na tabela 4.10 estão identificadas as frequências de ambos os métodos com o erro relativo e a respectiva correlação entre as configurações modais.

Tabela 4.10: Erro relativo entre as frequências obtidas e respectivo coeficiente MAC.

Frequência (Hz)		$\Delta f$ (%)	MAC
FDD	SAP2000		
7.67	7.16	6.6	0.45

Verificou-se alguma discrepância entre os valores de frequências identificados pelo método FDD e pelo modelo M3, traduzindo-se num erro relativo de 6.6%. Quanto ao coeficiente MAC, este não apresentou um valor suficientemente próximo de 1, de forma a garantir uma correlação satisfatória entre as configurações modais obtidas.

A impossibilidade de identificar o primeiro modo experimentalmente supõe dever-se às condições adversas em que se realizaram as medições. Para além disso, a eliminação do último ensaio limitou de alguma forma a interpretação dos resultados experimentais, dificultando a identificação de modos de vibração com deslocamentos verticais não nulos no eixo de simetria y.

É de salientar que, no caso de estruturas complexas, como escritórios, pisos de ginásios, é difícil identificar todas as frequências e os respectivos modos de vibração, uma vez que estas estruturas são normalmente sujeitas a acções ambientais que não são directamente aplicadas à laje. Tal não acontece em estruturas, onde a solicitação ambiental como o vento, facilita a obtenção de resultados, tornando-se mais acessível a identificação das frequências.

## Capítulo 5

# Análise dinâmica

### 5.1 Introdução

Neste capítulo o modelo de elementos finitos actualizado (M3) é utilizado para avaliar a resposta do piso devido a cargas dinâmicas induzidas por actividades rítmicas. Os resultados obtidos são comparados e analisados em termos de acelerações verticais de pico e em RMS, com os critérios de conforto recomendados na secção 2.3.

Em geral, a resposta dinâmica de uma estrutura sujeita a um carregamento dinâmico, pode escrever-se matematicamente através de um sistema de equações que regem o movimento. Recorrendo a este sistema de equações e, diferenciando-o numa parte que caracteriza as propriedades dinâmicas e noutra que descreve a acção do individuo, é possível realizar-se uma análise dinâmica da estrutura. A figura 5.1 ilustra a interacção dinâmica entre o indivíduo e a estrutura.

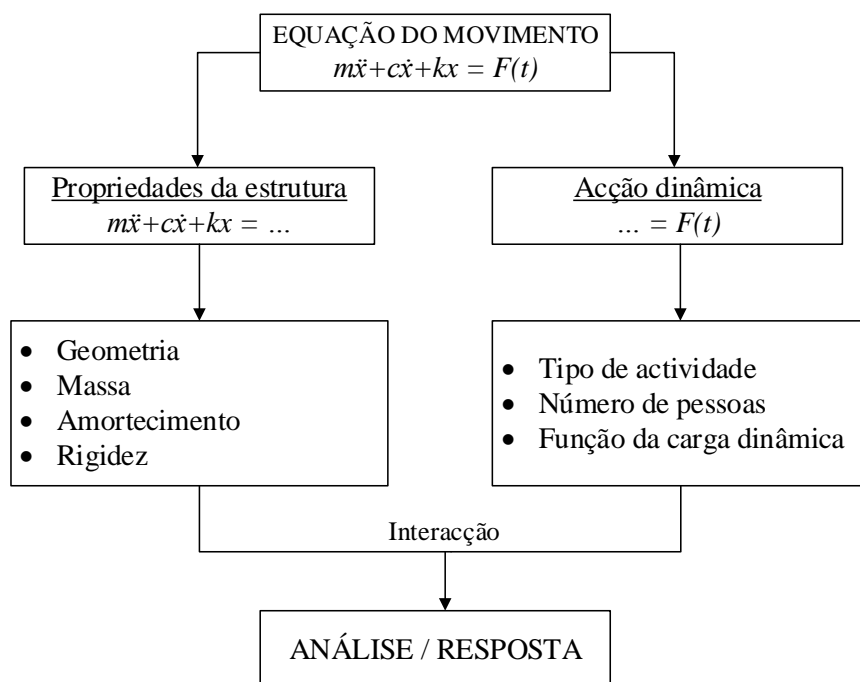


Figura 5.1: Interação entre o indivíduo e a estrutura, adaptado de [48].

## 5.2 Definição da carga dinâmica

O programa *SAP2000* apresenta várias opções predefinidas que definem vários tipos de funções que variam ao longo do tempo como a função seno. No entanto, pretendia-se uma função que fosse capaz de representar de forma mais conveniente os vários tipos de actividades rítmicas em estudo. Neste sentido, optou-se pelo uso da equação 5.1, referida na secção 2.2 para a definição da carga dinâmica.

$$\frac{F(t)}{G} = \left[ 1.0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T_p}t + \phi_n\right) \right] \quad (5.1)$$

em que,

$G$  - Peso do individuo (sendo admitido o valor de 700N [35])

$T_p$  - Período da actividade

Para ser representada esta função utilizou-se o programa *Matlab*, em que se introduziram os parâmetros necessários para a completa definição da carga dinâmica. O tempo estipulado para cada actividade teve em conta o número de saltos, isto é, para cada uma das actividades foi definido o tempo máximo que uma pessoa demora a fazer seis saltos. Esta opção deveu-se ao facto das respostas a partir dos seis saltos não apresentarem aumentos significativos dos valores de acelerações.

Definida a carga no *Matlab*, foi necessário exportar os dados para um ficheiro de texto de forma a serem importados para o *SAP2000*. Neste programa existe a possibilidade de introduzir este tipo de funções que variam com o tempo denominadas por funções *Time History*. Importa referir que a função importada para *Time History* foi definida em função do peso da pessoa.

Com a função definida e tendo em conta a análise a efectuar, foi necessário criar um *Load Pattern* com um carregamento do tipo *Live*, de forma a serem introduzidas as cargas dinâmicas no modelo em estudo. Assim, com todos os parâmetros definidos, falta escolher o tipo de análise a efectuar. Para isso, é necessário indicar na janela *Load Case*, o *Load Case Type*, o *Time History* e o *Time History Motion Type*.

Para além disso, deve-se seleccionar no *Load Name*, o carregamento *Live* que se definiu anteriormente, juntamente com a função definida inicialmente para o *Time History*. Tendo em conta a duração total do ensaio efectuado foram definidos também, na mesma janela, o *Output Time Steps* e o *Time Step Size*. Quanto ao amortecimento optou-se por utilizar um valor de 3% tendo em conta os resultados obtidos experimentalmente.

A figura 5.2 apresenta a janela do *SAP2000*, onde indica todos os parâmetros definidos.

Load Case Name: TH [Set Def Name] Notes: [Modify/Show...]

Load Case Type: Time History [Design...]

Initial Conditions:  
☒ Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State  
☐ Continue from State at End of Modal History [Dropdown]  
 Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case:  
 Use Modes from Case: MODAL [Dropdown]

Loads Applied:

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Load Pattern	Carga	Time_History	1.
Load Pattern	Carga	Time_History	1.

[Add] [Modify] [Delete]

☐ Show Advanced Load Parameters

Time Step Data:  
 Number of Output Time Steps: 1000  
 Output Time Step Size: 0.01

Other Parameters:  
 Modal Damping: Constant at 0.03 [Modify/Show...]

[OK] [Cancel]

Figura 5.2: Definição Load Case Data - Linear Modal History [14].

### 5.3 Casos de estudos

A frequência natural do piso deve ser afastada fora do alcance das componentes harmónicas das actividades que ali se vão praticar para que estas não se aproximem e a estrutura não entre em ressonância.

Como se pretende determinar as acelerações máximas consideraram-se os casos mais gravosos, isto é, escolheram-se as frequências das actividades de modo a que um dos seus harmónicos correspondesse à frequência fundamental do piso que, neste caso, foi de aproximadamente 6 Hz. Neste sentido e, tendo em conta os limites das frequências das actividades, tabela 2.1, que se praticam no piso em estudo, optou-se pelas frequências de 2 Hz e 3 Hz. A estas frequências estão associadas as actividades de aeróbica de alto impacto e o salto normal, respectivamente. Assim, a cada actividade corresponde um diferente tempo de contacto, o qual é menor quanto mais intensa for essa actividade. Para o caso da actividade de aeróbica o tempo de contacto é 1/2 e para o salto rítmico de 3 Hz é de 1/3.

Para a definição da equação 5.1, optou-se por utilizar os seis termos da série de Fourier apresentados na tabela 2.3. Nesta fase, com todos os parâmetros definidos, é agora possível definir a carga dinâmica para as diferentes frequências em estudo.

A figura 5.3 demonstra as funções de carga definidas para as frequências de 2 Hz e 3 Hz, respectivamente.

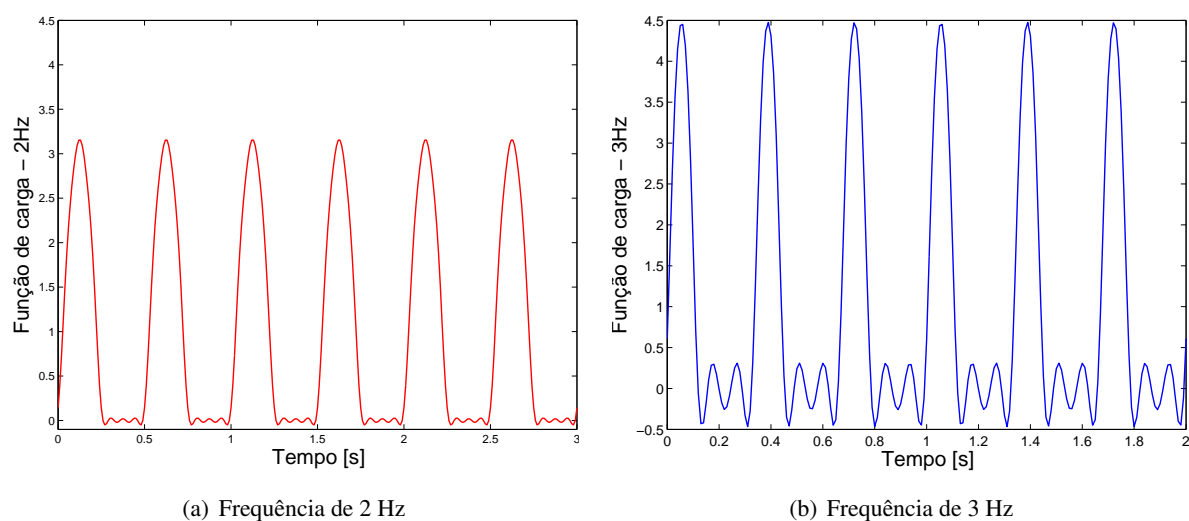


Figura 5.3: Funções de carga definidas para as diferentes frequências.

As cargas foram distribuídas sobre a zona onde normalmente se praticam as actividades rítmicas, como mostra a figura 5.4.

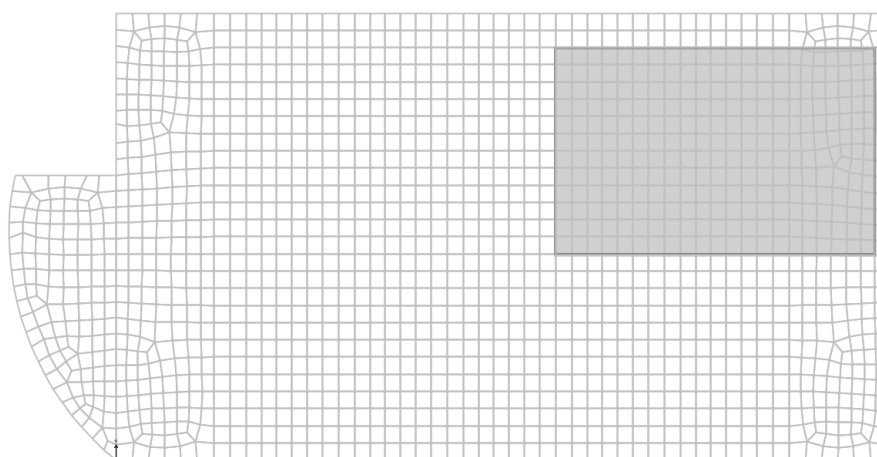


Figura 5.4: Representação da área existente para a prática de actividades humanas (área preenchida a cor cinzenta).

Importa referir que cada função de carga aplicada sobre a laje simula uma pessoa a praticar determinada actividade. A análise dinâmica efectuada teve em conta um efeito de sincronização perfeito, não sendo este um cenário realista, uma vez que na prática o movimento das pessoas dificilmente é sincronizado. No entanto, com esta abordagem é possível obter a maximização das acelerações. As opções tomadas na disposição das pessoas sobre a laje tiveram em conta a observação in situ da prática das actividades. Assim, verificou-se que para uma actividade com poucas pessoas, a tendência é de um maior afastamento entre elas. Por outro lado, à medida que aumenta o número de pessoas o espaçamento entre as mesmas tende a diminuir preenchendo a restante área livre do espaço.

Nesta análise, começou-se por simular a presença de 1 pessoa, de seguida, 5, 12, 20 até obter um número máximo de 30 pessoas, figura 5.5.



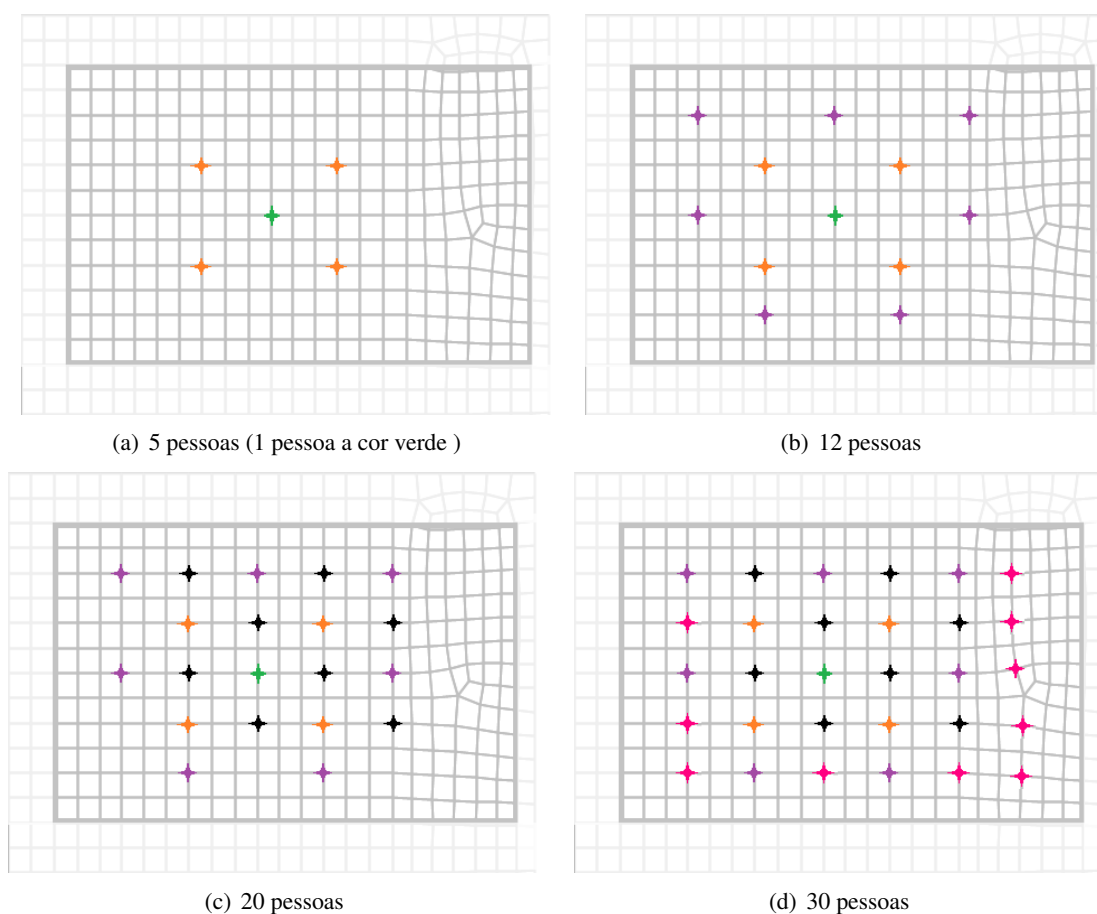


Figura 5.5: Disposição das pessoas sobre a laje em estudo.

Quando se aplica o número máximo de 30 pessoas, a sala encontra-se com 5 filas de 6 pessoas, espaçadas com incrementos de 3 m e 2 m, como ilustra a figura 5.6.

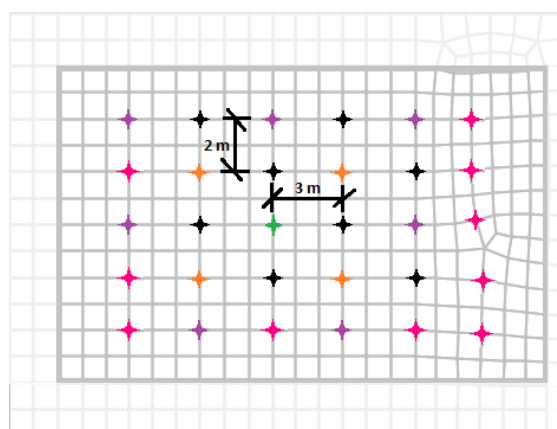


Figura 5.6: Espaços considerados na disposição das pessoas.

É de ressaltar que apenas foram contabilizados os seis primeiros modos, apresentados no capítulo 4, uma vez que as frequências correspondentes estão dentro da gama de valores de frequências tipicamente excitadas por actividades rítmicas.

### 5.3.1 Avaliação da resposta dinâmica da laje

Nesta secção são apresentadas as acelerações máximas para o número de pessoas: 1, 5, 12, 20 e 30. O ponto que foi escolhido para efectuar a monitorização dos incrementos de carga foi o mais representativo em todos os casos analisados.

A figura 5.7 ilustra o ponto de monitorização e pontos com acelerações máximas na laje para as duas frequências definidas.

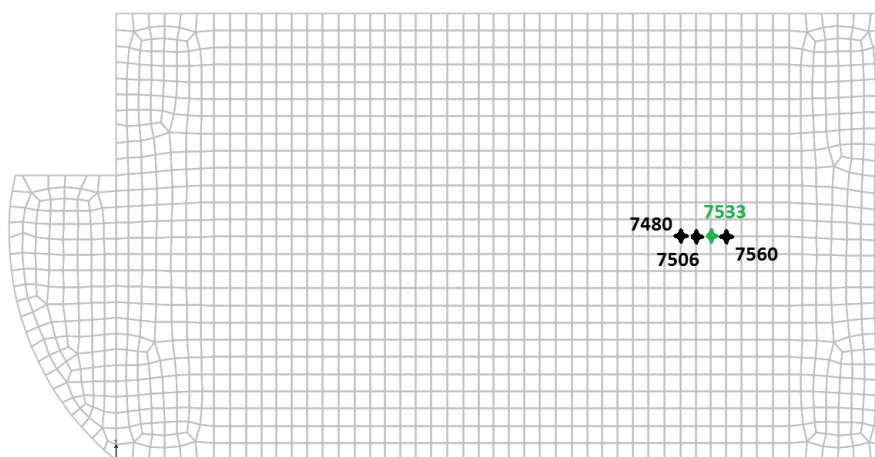


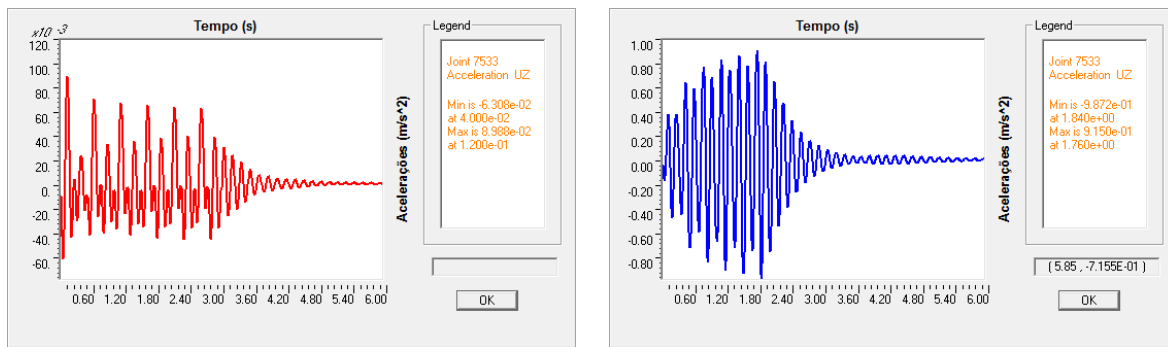
Figura 5.7: Representação do ponto de monitorização (cor verde) e os pontos de acelerações máximas (cor preta).

A tabela 5.1 mostra os resultados obtidos para todos os casos em estudo, tendo em conta o ponto de monitorização e, quando este não corresponde ao valor máximo, é também incluído o valor de maior aceleração.

Tabela 5.1: Acelerações máximas para as duas actividades, em função do número de pessoas.

		Frequências das actividades			
		f = 2 Hz		f = 3 Hz	
		Nó	Aceleração (m/s <sup>2</sup> )	Nó	Aceleração (m/s <sup>2</sup> )
1 pessoa		7480	0.005	7506	0.045
		7533	0.004	7533	0.043
5 pessoa		7506	0.019	7506	0.190
		7533	0.019	7533	0.187
12 pessoas		7533	0.038	7533	0.389
20 pessoas		7533	0.063	7533	0.635
30 pessoas		7560	0.091	7533	0.915
		7533	0.090		

Apresenta-se, a título de exemplo a figura 5.8, que mostra as acelerações máximas das frequências de 2 HZ e 3 Hz no ponto de monitorização, para o caso correspondente às 30 pessoas.



(a) Frequência de 2 Hz

(b) Frequência de 3 Hz

Figura 5.8: Acelerações máximas no ponto de monitorização para as diferentes frequências.

### 5.3.2 Verificação dos níveis de conforto

As normas apresentadas na secção 2.3 utilizam como critério de conforto as acelerações verticais de pico (AISC e ISO 2631) e as acelerações em RMS (ISO 2631).

Nesta secção efectuou-se uma comparação entre as acelerações obtidas no ponto de monitorização de cada uma das frequências e os valores limite recomendados, verificando qual o número máximo de pessoas para que o piso não exceda os valores de acelerações limite.

Na figura 5.9 representam-se os valores da tabela 5.1 no ponto de monitorização (7533), assim como se assinalam o níveis de conforto máximo recomendados pelas normas ISO 2631 e pelo guia prático AISC.

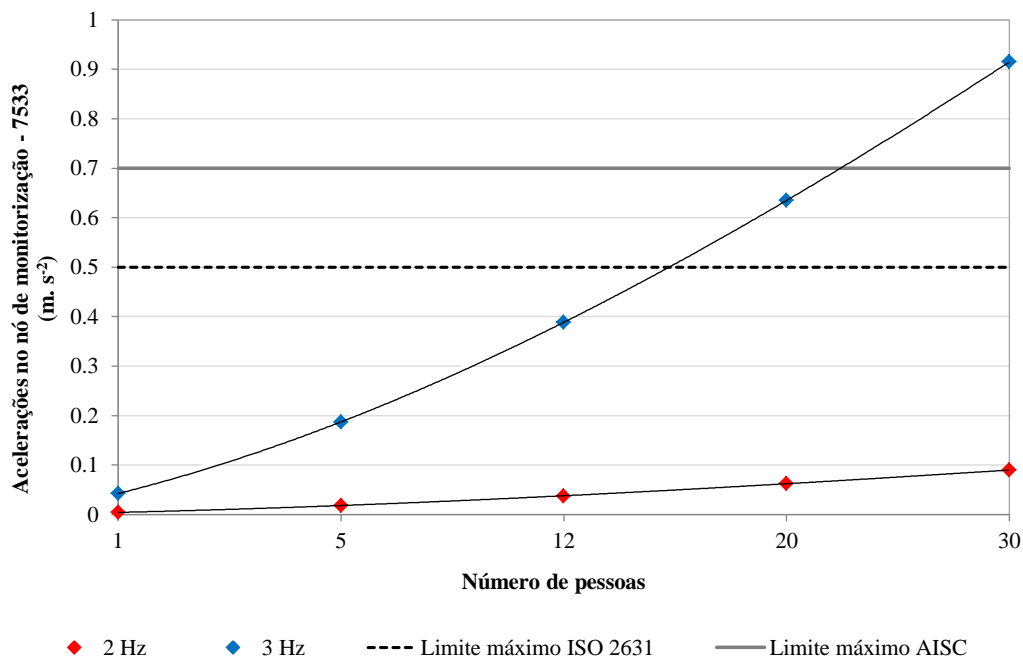


Figura 5.9: Variação de aceleração de pico em função do aumento do número de pessoas no ponto de monitorização (7533).

Através da análise da figura 5.9, verificou-se que os valores de acelerações de pico referentes à frequência de 3 Hz, foram excedidos para um número aproximado de 15 pessoas para o limite máximo definido pela ISO 2631. Por outro lado, o critério definido pelo guia prático AISC foi ultrapassado a partir de um número aproximado de 22 pessoas. No caso da frequência de 2 Hz a actividade de aeróbica não provoca acelerações de pico suficientes para ultrapassar os limites máximos estipulados pelos critérios considerados.

A figura 5.9 ilustra os valores de acelerações obtidos em RMS bem como o limite máximo definido pela norma ISO 2631.

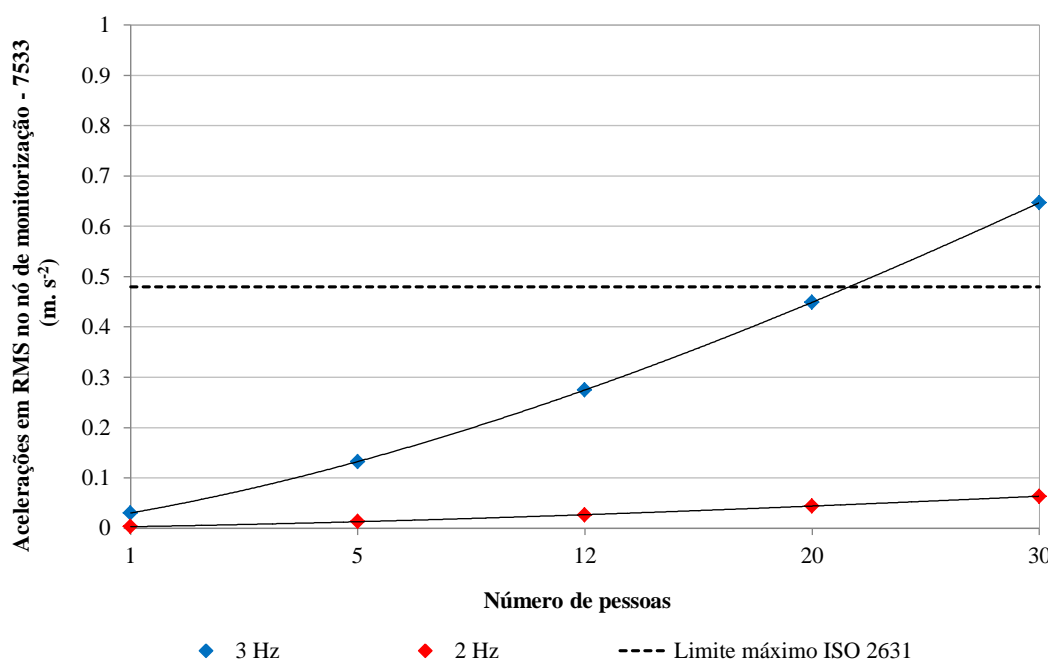


Figura 5.10: Variação de aceleração em RMS em função do aumento do número de pessoas no ponto de monitorização (7533).

A figura 5.10 demonstra que para frequências de 2 Hz, as acelerações em RMS obtidas respeitaram os limites definidos pela norma ISO 2631. Relativamente à frequência de 3 Hz, verifica-se que os limites de conforto definidos pela norma ISO 2631 não são garantidos a partir de um número aproximado de 21 pessoas.

### 5.3.3 Discussão dos resultados

Nas duas frequências, verificou-se que um aumento do número de pessoas representa um aumento do valor das acelerações (de pico e em RMS) como seria expectável.

Relativamente às actividades com frequências próxima de 2 Hz (aeróbica), os limites são respeitados ou seja, actividades deste tipo podem ser praticadas sem qualquer restrição quanto ao número de pessoas.

Para actividades com frequências próximas de 3 Hz, com perfeitas condições de sincronização, foi verificado que para um número acima de 15 pessoas, o limite de acelerações máximas de pico foi

ultrapassado. No entanto, constatou-se o critério em acelerações em RMS, só foi excedido a partir das 21 pessoas. Para prevenir estas situações deve-se, então, limitar a prática destas actividades a um numero inferior de 15 pessoas. Outra solução pode passar pelo aumento do amortecimento ou então pela adição de dispositivos de controlo ao piso [30], como por exemplo, os amortecedores de massa sintonizada (TMD's).

Importa referir que a caixa de ar existente em determinadas partes da laje, contribui para a diminuição da resposta dinâmica, reduzindo assim, as acelerações máximas do piso.



## Capítulo 6

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 6.1 Conclusões

A resposta dinâmica de estruturas pode ser reproduzida, essencialmente, por via da modelação numérica ou da modelação experimental. Quanto à modelação numérica, o modelo de elementos finitos desenvolvido a partir de projectos e dados já existentes, nem sempre representa o comportamento real da estrutura. Por outro lado, a modelação experimental permite obter informações relevantes para o desenvolvimento de modelos com comportamento linear e não linear. Os ensaios experimentais possibilitam esclarecer algumas dificuldades durante a definição do modelo de elementos finitos, nomeadamente, a contribuição dos elementos não estruturais, a continuidade entre os elementos estruturais e os efeitos devido a danos existentes na estrutura. Os métodos de identificação modal são uma forma eficaz de caracterizar as propriedades dinâmicas de sistemas com comportamento linear, através da medição e análise de dados relativamente à resposta dinâmica quando sujeitas a solicitações forçadas e ambientais.

Este trabalho teve como objectivo principal a identificação das propriedades dinâmicas de um piso de ginásio do pavilhão Multidesportivo do SCP, situado em Lisboa seguido da actualização do modelo de elementos finitos. O modelo actualizado permitiu, então, efectuar uma análise dinâmica, submetendo-o a carregamentos provenientes de actividades humanas rítmicas.

Para o caso em estudo, foi elaborado um modelo prévio de elementos finitos (M1) no *SAP2000*, a partir dos dados provenientes das peças desenhadas fornecidas pela administração do SCP, tendo como objectivo a estimativa das frequências e dos modos de vibração, bem como o planeamento da malha para os ensaios experimentais. Foi efectuada uma análise modal onde se identificaram frequências entre 4.84 Hz e 6.32 Hz para os modos predominantemente verticais.

Na caracterização das propriedades dinâmicas foi adoptada a técnica de vibração ambiental. Foram também efectuados vários ensaios do impacto do calcanhar como forma de identificar a gama de frequências onde seriam expectáveis encontrar modos de vibração. As séries temporais obtidas pelos transdutores foram pré-processadas em *Matlab* e *ARTEMIS* para reduzir o erro e aferir a qualidade dos mesmos. Foi utilizado um conjunto de sete ensaios para a identificação modal realizada no programa *ARTEMIS*, através de dois métodos de identificação estocástica, o EFDD e o SSI-UPC.

As propriedades dinâmicas obtidas foram comparadas com os resultados do modelo M1, através do cálculo do coeficiente MAC e do erro relativo entre as respectivas frequências. Dadas as condições em

que foram realizados os ensaios apenas foi possível identificar os modos de vibração pares. Verificou-se, entre o primeiro modo de vibração identificado pelos dois métodos e o segundo modo de vibração encontrado pelo modelo M1, uma correlação de 53% com um erro relativo em frequências na ordem dos 20%.

Como se verificou uma discrepância entre os parâmetros modais obtidos através da modelação no SAP2000 e os parâmetros resultantes do conjunto de ensaios experimentais, foi necessário efectuar uma revisão das opções adoptadas na modelação e um ajuste dos parâmetros pré-definidos no modelo M1.

A qualidade do modelo actualizado M3 foi avaliada através do coeficiente MAC. Conseguiu-se reduzir o erro relativo entre as frequências para 1% e aumentar em 20% a correlação entre os dois modos de vibração encontrados. Foi possível encontrar uma segunda frequência pelo método FDD que corresponde ao quarto modo de vibração do modelo M3, com uma correlação de 45% entre as configurações e um erro relativo entre as frequências de 6%.

Constatou-se que as quatro primeiras frequências associadas aos quatro primeiros modos de vibração, respectivamente, incidem na gama de frequências críticas quando a laje é solicitada a acções provenientes de actividades rítmicas, como a aeróbica e os saltos. Neste sentido, foi efectuada uma análise da resposta dinâmica, averiguando se as acelerações (de pico e em RMS), respeitam os limites máximos impostos pela norma ISO 2631 e pelo guia prático AISC. Verificou-se a tendência que à medida que se aumentou gradualmente o número de pessoas, a resposta dinâmica da estrutura em acelerações foi mais elevada.

Comparando os critérios de conforto humano (disponíveis nas normas apresentadas) com as acelerações obtidas pela análise dinâmica, verificou-se que actividades com frequências de 2 Hz podem ser praticadas no piso, uma vez que não violam os limites máximos estipulados. Quando se consideraram actividades com frequências de 3 Hz, os limites das normas não foram respeitados para um número acima das 15 pessoas entendendo-se, neste caso, que as vibrações induzidas por este tipo de actividades podem ser classificadas como excessivas. Para prevenir estas situações a prática destas actividades deve ser limitada a um número inferior de 15 pessoas ou devem ser introduzidos equipamentos de controlo estrutural.

## **6.2 Desenvolvimentos futuros**

Na sequência de todo o estudo desenvolvido, são apresentadas algumas sugestões para uma possível continuação deste trabalho:

- Realização de ensaios no piso, com a possibilidade de instalação de sensores de medição colocados sobre a metade da estrutura, permitindo a identificação de modos de vibração ímpares;
- Simulação do comportamento da caixa-de-ar existente no pavilhão do SCP;
- Diversificação dos carregamentos dinâmicos provenientes de actividades rítmicas;
- Como os valores limites de acelerações ultrapassaram os recomendados, propõe-se o estudo de diversos métodos de controlo estrutural, como forma de atenuar estes efeitos.



# Bibliografia

- [1] Allemang, R. The modal assurance criterion (MAC). *Twenty Years of Use and Abuse. Sound and Vibration*, 14-21, 2003.
- [2] Allen, D., Pernica, G. Control of floor vibration. *National Research Council of Canada*, 22, 1998.
- [3] Allen, D., Rainer, J., Pernica, G. Vibration criteria for assembly occupancies. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 12:617-623, 1985.
- [4] Allen, D., Rainer, J., Pernica, G. Vibration criteria for long-span floors. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 3:165-173, 1977.
- [5] Alves, N., Roitman, N., Magluta, C. Dynamic response under human movements. *Materials & Structures*, 32:31-37, 1999.
- [6] Bachmann, H. Vibrations of building structures caused by human activities, case study of a gymnasium. *Canada Institute for Scientific and Technical Information*, 6:104-110, 1983.
- [7] Bendat, J., Piersol, A. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. John Wiley & Sons., 1980.
- [8] Bendat, J., Piersol, A. *Random data: Analysis and measurement procedures*. Wiley, 2000.
- [9] Blakeborough, A., Williams, M. Measurement of floor vibrations using a heel drop test. *Computers & Structures*, 156:367-371, 2003.
- [10] Brincker, R., Palle, A., Cantieni, R., Ventura, C. Modal estimation of civil structures subject to ambient and harmonic excitation. *Conference Proceedings: IMAC-XXVI: A Conference & Exposition on Structural Dynamics.*, 2008.
- [11] Caetano, E. *Identificação experimental de parâmetros dinâmicos em sistemas estruturais*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1992.
- [12] Caetano, E., Cunha, A., Magalhães, F. Novas perspectivas na análise do comportamento dinâmico de estruturas. *Revista da Associação Portuguesa de Análise Experimental de Tensões*, 18:23-34, 2010.
- [13] CSI. *Education Services - Integrated finite elements analysis and design of structures*, 1998.
- [14] CSI. *Computers and Structures - Analysis reference manual for SAP2000 V.15*, 2005.
- [15] Cunha, A., Caetano, E., Magalhães, F., Moutinho, C. From input-output to output-only modal identification of civil engineering structures. In *Proceedings of the 1st IOMAC Conference*. Denmark, 2005.

- 
- [16] EN 1990 *Eurocode 0: Basis of structural design*. The European Union Per Regulation, Abril 2002.
- [17] Faisca, R. *Caracterização de cargas dinâmica geradas por actividades humanas*. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.
- [18] Felber, A. *Development of a hybrid bridge evaluation system*. Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, University of British Columbia, Canada.
- [19] Feldmann, M., Heinemeyer, C., Lukic, M. *Hivoss - Human-induced vibration of steel structures*. Directorate-General for Research and Innovation, European Commission, 2007.
- [20] Hamed, E., Frostig, Y. Natural frequencies of bonded and unbonded prestressed beams-prestress force effects. *Journal of Sounds and Vibration*, 295:28-39, 2006.
- [21] Ibsen, L., Liingaard, M. *Experimental modal analysis*. Department of Civil Engineering, Aalborg University, 2006.
- [22] ISO 2631-1 *Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements*. International organization for standarzation, 1985.
- [23] ISO 2631-2 *Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 2: Continuous and shock-induced vibration in buildings (1 to 80 Hz)*. International organization for standarzation, 2003.
- [24] Ji, T., Ellis, B. Floor vibration induced by dance-type loads: theory. *The Structural Engineer*, 73:37-44, 1994.
- [25] Ji, T., Ellis, B. Floor vibration induced by dance-type loads: verification. *The Structural Engineer*, 72:45-50, 1994.
- [26] Kappos, A. *Dynamic loading and design of structures*. CRC Press 1ª Edição, Novembro 2002.
- [27] Lima, D. *Controle de vibrações induzidas em uma laje de academia de ginástica com a utilização de amortecedores de massa sintonizados*. Master's thesis, Universidade de Brasília, 2007.
- [28] Litter, J. An assessment of some of the different methods for estimating damping from full-scale testing. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 57:179-189, 1995.
- [29] Magalhães, F. *Identificação modal estocástica para validação experimental de modelos numéricos*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2004.
- [30] Martins, C. *Vibrações induzidas pelas actividades humanas em ginásios e salões de dança*. Master's thesis, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2011.
- [31] MATLAB. *Version 7.10.0 (R2010a)*. The MathWorks Inc., 2010.
- [32] Mello, A. *Análise do efeito da interação aço-concreto sobre a resposta dinâmica de pisos mistos*. Ph.D. thesis, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2009.
- [33] Mello, A., Silva, J., Vellasco, P., Andrade, S., Lima, L. Dynamic analysis of composite systems made of concrete slabs and steel beams. *Jornal of Constructional Steel Research*, 64:1142-1151, 2008.

- [34] Mendes, P., Oliveira, S. *Análise dinâmica de estruturas: Utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 2008.
- [35] Murrat, T., Aleen, D., Ungar, E. *Floor vibrations due to human activity*. Steel Design Guide Series, 1997.
- [36] Naeim, F. *Design practice to prevent floor vibrations*. Structural Steel Education Council, 1991.
- [37] NBR. *Norma Brasileira NBR:6118 - Projecto de estruturas em betão armado*. 2007.
- [38] NP EN 1998-1-1 *Eurocódigo 1: Acções em estruturas. Parte 1-1: Acções gerais. Pesos volúmicos, pesos próprios, sobrecargas em edifícios*. IPQ: Instituto Português da Qualidade, Lisboa-Portugal, Março 2010.
- [39] Pavic, A. *Vibration serviceability of long-span cast in-situ concrete floors*. Ph.D. thesis, University of Sheffield, 1999.
- [40] Pavic, A., Reynolds, P., Waldron, P., Bennett, K.J. Critical review of guideguide for checking vibration serviceability of post-tensioned concrete floors. *Cement & Concrete Composites*, 23:21-31, 2008.
- [41] Peeters, B., Roeck, G. Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systms and Signal Processing*, 13(6):855-878, 1999.
- [42] Reynolds, P., Pavic, A., Waldron, P. Modal testing, FE analysis and FE model correlation of a 600 tonne post-tensioned concrete floor. *Proceedings of ISMA23*, 3:1129-1136, 1998.
- [43] Rodrigues, J. *Identificação modal estocástica*. Ph.D. thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2004.
- [44] Smith, A., Hicks, S. *Design of floors for vibration: A new approach*. The Steel Construction Institute, 2009.
- [45] SVS. *Structural vibration solutions, Denmark: ARTeMIS software*. [www.svibs.com](http://www.svibs.com).
- [46] SYSCOM. *SYSCOM Instruments SA, Switzerland: MR2002-CE User Manual*.
- [47] Telford, T. *Model Code CEB 1990: Design Code*. Comité Euro-International du Béton, 1990.
- [48] Ul-Alam, M., Amin, A. Pedestrian induced vibrations in footbridges: Reappraisal of code provisions. *Joint Conference on Advances in Bridge Engineering, IABSCE*, 2:344–351, 2010.
- [49] Zhang, L., Brincker, R., Andersen, P. An overview of operational modal analysis: major development and issues. In *Proceedings of the 1st IOMAC Conference*. Denmark, 2005.



## Anexo A

# Verificação analítica da frequência da viga em caixão.

O presente anexo apresenta o cálculo da frequência analítica da viga em caixão segundo recomendações técnicas [19], de forma a verificar se a modelação da viga foi correctamente efectuada e ser comparada com a frequência fundamental da viga obtida no programa de cálculo automático.

### A.1 Cálculo da frequência fundamental de uma viga

A frequência fundamental de uma viga pode ser determinada, em função das condições de apoio nas extremidades, tendo como base as recomendações técnicas [19]. De forma a limitar as frequências máximas e mínimas da viga em caixão, estas foram calculadas segundo duas condições de apoio, encastrado-encastrado A.1 e apoiado-apoiado A.2.

$$f = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.37\mu l^4}} \quad (\text{A.1})$$

$$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.49\mu l^4}} \quad (\text{A.2})$$

em que,

E - Módulo de elasticidade (N/m<sup>2</sup>)

I - Momento de inércia (m<sup>4</sup>)

$\mu$  - massa distribuída (kg/m)

l - comprimento da viga em estudo.

#### A.1.1 Cálculo da frequência da viga em caixão

Na figura A.1 apresenta-se a secção transversal da viga em estudo.

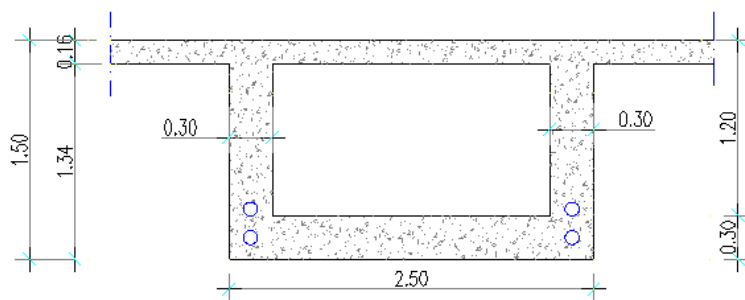


Figura A.1: Secção transversal a meio vão da viga VPT.1.

Nos cálculos efectuados, utilizam-se as seguintes constantes:

$$E = 35 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$I = 0.2987 \text{ m}^4$$

$$\text{Área} = 1.47 \text{ m}^2$$

$$\mu = 25000 \times 1.374 = 36750 \text{ N/m} = 3750 \text{ kg/m}$$

$$l = 30.15 \text{ m}$$

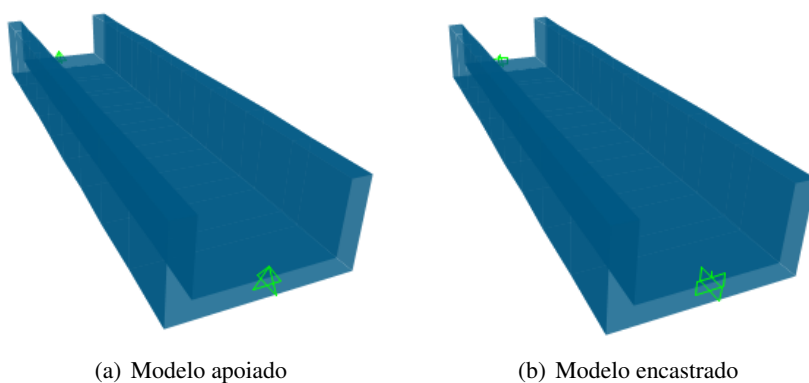
Na tabela A.1 estão indicadas as frequências calculadas segundo as duas condições de apoios.

Tabela A.1: Frequências fundamentais da viga em caixaão.

	Frequência analítica
Encastrado-Encastrado	6.66 Hz
Apoiado-Apoiado	2.89 Hz

## A.2 Cálculo da frequência da viga em caixaão pelo programa SAP2000

Na figura A.2 está representado o modelo da viga em caixaão com as respectivas condições de apoio.



(a) Modelo apoiado

(b) Modelo encastrado

Figura A.2: Modelo da viga em caixaão.

Na figura A.3 apresentam-se os modos de vibração da viga em caixão com as respectivas frequências.

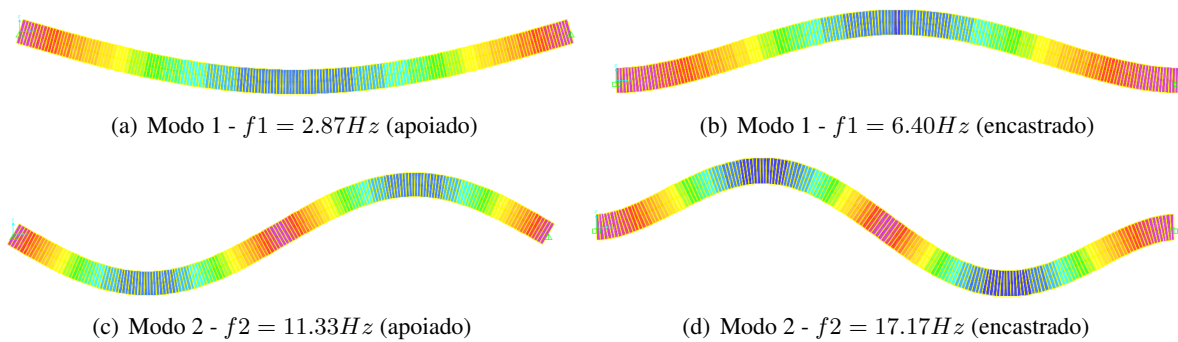


Figura A.3: Primeiro e segundo modo de vibração da viga em caixão

### A.3 Erros relativos

Na tabela A.2 apresenta-se o erro relativo entre as frequências fundamentais calculadas e as obtidas pelo programa SAP2000.

Tabela A.2: Comparação entre as frequências analíticas e as obtidas pelo SAP2000.

	Frequência analítica	Frequência (SAP2000)	Erro relativo (%)
Encastrado-Encastrado	6.66 Hz	6.40 Hz	3.89
Apoiado-Apoiado	2.89 Hz	2.87 Hz	0.81